

Симедианы

Геометрия
богомерзостна!

Южнобутовская
мудрость

1. а) Пусть BM — симедиана треугольника ABC . Докажите, что $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|^2}{|BC|^2}$.
- б) Докажите, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке. (Эта точка называется точкой Лемуана).
2. а) Докажите, что симедиана AS делит пополам любой отрезок B_1C_1 антипараллельный стороне BC .
- б) Докажите, что если симедиана AS делит пополам отрезок B_1C_1 , то этот отрезок антипараллелен стороне BC .
3. Докажите, что если отрезок B_1C_1 антипараллелен стороне BC , то B_1C_1 перпендикулярно OA , где O — центр описанной окружности.
4. Докажите, что точка Лемуана треугольника ABC с прямым углом C является серединой высоты CH .

Определение. Вписанный четырехугольник называется *гармоническим*, если произведения длин его противоположных сторон равны.

5. а) Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что

$$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|^2}{|BC|^2} = \frac{|AD|^2}{|DC|^2}.$$

- б) Докажите, что каждая диагональ гармонического четырехугольника является симедианой треугольников, на которые разбивает четырехугольник другая диагональ.
6. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P . Докажите, что прямая AP содержит симедиану AS .
7. Дан треугольник ABC . Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает прямую AB в точке D . Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K . Докажите, что прямая DK делит отрезок BC пополам.
8. Разрежьте неравносторонний треугольник на четыре подобных треугольника, среди которых не все одинаковы.