Кружок в Хамовниках. Группа 11-2 **20.01.2020**

Серия 23. Алгебра

Vita sine litteris mors est

Латинская мудрость

1. Даны четыре последовательных натуральных числа, бо́льших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх натуральных чисел, бо́льших 1.

2. Известно, что каждый из трёхчленов x^2+ax+b и $x^2+ax+b+1$ имеет хотя бы по одному корню, и все корни этих трёхчленов целые. Докажите, что трёхчлен $x^2+ax+b+2$ корней не имеет.

3. Фунция $f(x)$, заданная на всех числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет условию

$$f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно чётная?
Найдите хотя бы одну *непостоянную* функцию, удовлетворяющую условию.

4. Положительные числа x, y и z удовлетворяют условию $xyz \geqslant xy+yz+zx$. Докажите неравенство

$$\sqrt{xyz} \geqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

5. Положительные числа x, y и z удовлетворяют условию $ab+bc+ca=1$. Докажите неравенство

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}+\sqrt{c+\frac{1}{c}} \geqslant 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right).$$

7. Изначально на доску выписали числа $1-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$. Каждую минуту с доски стираются все три написанных на ней числа x, y и z, а вместо них на доску записываются числа x^2+xy+y^2, y^2+yz+z^2 и z^2+zx+x^2. Могут ли в некоторый момент все три числа на доске оказаться рациональными?

8. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициента которого равен 1. Затем он сообщем им k целых чисел n_1, n_2, …, n_k, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)\cdot P(n_2)\cdot\ldots\cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

9. Бесконечная последовательность ненулевых чисел такова, что при всех натуральных $n \geqslant 2018$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$x^{2n}+a_1x^{2n-2}+a_2x^{2n-4}+\ldots+a_n.$$

Докажите, что существует такое N, что в бесконечной последовательности a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, … каждый член меньше предыдущего.