ЦПМ. Группа 11-2 **02.04.2020**

Уравнение Пелля

1. Натуральные числа a и b таковы, что $(2+\sqrt{3})^n = a+b\sqrt{3}$. Докажите, что $a^2-3b^2=1$.

2. Докажите, что у уравнения $x^2-2y^2=1$ бесконечно много решений в натуральных числах.

Определение. Уравнение вида $x^2-dy^2=1$, где d не является квадратом натурального числа, называется уравнением Пелля.

Определение. Назовём число вида $a+b\sqrt{d}$, где a и b — целые числа, хорошим; если при этом a и b больше 0, назовём число замечательным.

Нормой хорошего числа $a+b\sqrt{d}$ назовём выражение a^2-db^2. Норму числа x будем обозначать $N(x)$.

3. Докажите, что сумма, разность и произведение хороших чисел является хорошим числом.

4. Докажите, что норма произведения двух хороших чисел равна произведению норм.

Определение. Скажем, что одно хорошее число делится на другое, если их частное — хорошее число.

5. Докажите, что если норма замечательного числа равна 1, то на него делится любое замечательное число.

6. Пусть x — минимальное замечательное число, норма которого равна 1, y — другое замечательное число с нормой 1. Докажите, что y является степенью числа x.

Решите в натуральных числах:

7. $x^2+y^2=4xy+1$.

8. $a^2-2b^2=-1$.

9. $a^2-3b^2=13$.

10. Найдите все такие натуральные n, для которых $2n+1$ и $3n+1$ — точные квадраты.

11. Докажите, что натуральное число N является числом Фибоначчи тогда и только тогда, когда $5N^2+4$ или $5N^2-4$ ялвяется квадратом натурального числа.

12. Докажите, что существует бесконечно много четвёрок натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них, увеличенное на 1, является точным квадратом.