

Серия 16. Разнобой

1. Рассмотрим произведение десяти попарно различных натуральных сомножителей, каждый из которых не больше 30 и никакие два из которых не различаются ровно на 10 или ровно на 20. Найдите сумму всевозможных таких произведений

2. (а) Про многочлен $P(x)$ известно, что

$$P(1) = 1, P(2) = 8, P(3) = 27, P(5) = 125, P(6) = 216, P(7) = 343$$

Какое наименьшее возможное значение может принимать $|P(4)|$?

(б) Все коэффициенты $P(x)$ - целые.

3. Пусть X – непустое конечное множество. Двое по очереди называют непустые подмножества множества X , причем запрещается называть такие, которые содержат хотя бы одно уже названное подмножество. Проигрывает тот игрок, который не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?

4. При каких натуральных n для всякого натурального $k > n$ найдется число с суммой цифр k , кратное n ?

5. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал приведенный многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами. Затем он сообщит им k целых чисел n_1, n_2, \dots, n_k , и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2) \dots P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

6. В классе m учеников. В течение сентября каждый из них несколько раз ходил в бассейн; никто не ходил дважды в один день. Первого октября выяснилось, что все количества посещений бассейна у учеников различны. Более того, для любых двух из них обязательно был день, когда первый из них был в бассейне, а второй нет, и день, когда, наоборот, второй из них был в бассейне, а первый нет. Найдите наибольшее возможное значение m . (В сентябре 30 дней.)

7. Дано натуральное число $n > 2$. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает $2n$ (не обязательно различных) неотрицательных чисел x_1, x_2, \dots, x_{2n} , сумма которых равна 1. Вася расставляет эти числа по кругу в некотором порядке по своему усмотрению. После этого он вычисляет произведения пар соседних чисел и выписывает на доску наибольшее из всех $2n$ полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, а Вася чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре?