

## Серия 6. Индукция

1. Назовем натуральное число ровным, если в его десятичной записи все цифры одинаковы (например, 3, 111, 444444). Докажите, что любое  $n$ -значное число можно представить как сумму не более чем  $n + 1$  ровных чисел
2. Докажите, что для любого  $k$  и любого нечетного  $m$  найдется такое  $n$ , что  $n^n - m$  делится на  $2^k$ .
3. Докажите, что при  $n > 2$ , число  $n!$  можно представить в виде суммы  $n$  его различных делителей.
4. Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты  $n$  на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?
5. В нашем распоряжении имеются  $3^{2k}$  неотличимых по виду монет, одна из которых фальшивая — она весит чуть легче настоящей. Кроме того, у нас есть трое двухчашечных весов. Известно, что двое весов исправны, а одни — сломаны (показываемый ими исход взвешивания никак не связан с весом положенных на них монет, т.е. может быть как верным, так и искаженным в любую сторону, причем на разных взвешиваниях — искаженным по-разному). При этом неизвестно, какие именно весы исправны, а какие сломаны. Как определить фальшивую монету за  $3k + 1$  взвешиваний?
6. На химической конференции присутствовало  $k$  учёных химиков и алхимиков, причём химиков было больше, чем алхимиков. Известно, что на любой вопрос химики всегда отвечают правду, а алхимики иногда говорят правду, а иногда лгут. Оказавшийся на конференции математик про каждого учёного хочет установить, химик тот или алхимик. Для этого он любому учёному может задать вопрос: "Кем является такойто: химиком или алхимиком?" (В частности, может спросить, кем является сам этот учёный.) Доказать, что математик может установить это за  $[1, 5k - 1, 5]$  вопросов.
7. У Карлсона есть 1000 банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой не больше, чем сотая часть всего варенья. Карлсон считает завтрак правильным, если во время него он съедает поровну варенья из каких-то 100 банок и не трогает остальные. Докажите, что Карлсон может съесть все варенье за несколько правильных завтраков.