## Серия 8. Теорема Вильсона

Labor omnia vincit

Латинская мудрость

**1**. Пусть $p$ — простое нечётное число. Докажите, что

$$1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (p-2)^2 = (-1)^{(p+1)/2} \mod p.$$

**2**. Пусть $p$ — простое число, $N = 1 + 2 + 3 + \ldots + (p-1) = \frac{(p-1)p}{2}$. Докажите, что $(p-1)! \equiv p-1 \mod N$.

**3**. С помощью теоремы Вильсона докажите, что для любого простого $p$ вида $4k+1$ существует натуральное $m < p$ такое, что $m^2+1$ делится на $p$.

**4**. Найдите все натуральные $n$, удовлетворяющие следующему свойству: существует перестановка $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ чисел 0, 1, 2, …, $n-1$ такая, что остатки при делении на $n$ чисел $a_1$, $a_1a_2$, …, $a_1a_2\ldots a_n$ различны.

**5**. Для целых $n \geqslant 5$ и $q$ таких, что $n \geqslant q \geqslant 2$ докажите, что $[(n-1)!/q]$ делится на $q-1$.

**6**. Рассмотрим многочлен с целыми коэффициентами $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, $a_n > 0$. Докажите, что существует натуральное $m$ такое, что $P(m!)$ — составное число.

**7**. Пусть $p$ и $p+2$ — простые числа-близнецы. Докажите, что $4(p-1)! + 4 + p$ делится на $p(p+2)$.

**8**. Пусть $p \geqslant 5$ — простое число,

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2}.$$

а) Докажите, что $p$ является делителем $m$;
б) Докажите, что $p^2$ является делителем

$$(p-1)!\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1}\right).$$