Серия 12. Суммы

1. Дано 10 двузначных чисел. Докажите, что можно выбрать из них две непересекающиеся группы чисел так, чтобы сумма чисел в каждой группе была одинакова.

2. Сумма 1999 чисел равна нулю, а сумма их квадратов равна 1. Доказать, что эти числа можно так расставить по кругу, что сумма всевозможных попарных произведений двух соседних чисел не будет превосходить $-\frac{1}{1999}$

3. Для каждого натурального n найдите наименьшее натуральное k, обладающее следующим свойством. Любой набор действительных чисел с суммой n, каждое из которых принадлежит отрезку $[0;1]$, можно разбить на k групп (некоторые из которых могут быть пустыми), чтобы сумма чисел в каждой группе не превосходила 1.

4. Пусть $k > 2$ целое число. Натуральное число m назовем хорошим, если числа $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$ можно разбить на два множества так, чтобы сумма чисел в одном из них была в m раз больше, чем в другом. Докажите, что минимальное хорошее число взаимнопросто с числом k.

5. Имеется набор из $2n$ чисел, находящихся в отрезке $[1;2]$. Доказать, что их можно разбить на две группы так, что суммы чисел s_1, s_2 в этих группах удовлетворяют условию $\frac{n}{n+1} \leqslant \frac{s_1}{s_2} \leqslant 1$.

6. В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причем ни одна изюминка не весит больше $1+x$ г. При каком наибольшем значении x заведомо можно разложить весь изюм на две чаши весов так, чтобы они показали разность, не превосходящую 1 г?

7. При каком наибольшем натуральном k из любого набора из $2n$ целых чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_{2n} таких, что $-n \leqslant x_i \leqslant n$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} = k$, можно выбрать несколько чисел с суммой 0?

Кружок в “Хамовниках”. 2019-2020 учебный год. 11 класс. Группа 11-2.

Серия 12. Суммы

1. Дано 10 двузначных чисел. Докажите, что можно выбрать из них две непересекающиеся группы чисел так, чтобы сумма чисел в каждой группе была одинакова.

2. Сумма 1999 чисел равна нулю, а сумма их квадратов равна 1. Доказать, что эти числа можно так расставить по кругу, что сумма всевозможных попарных произведений двух соседних чисел не будет превосходить $-\frac{1}{1999}$

3. Для каждого натурального n найдите наименьшее натуральное k, обладающее следующим свойством. Любой набор действительных чисел с суммой n, каждое из которых принадлежит отрезку $[0;1]$, можно разбить на k групп (некоторые из которых могут быть пустыми), чтобы сумма чисел в каждой группе не превосходила 1.

4. Пусть $k > 2$ целое число. Натуральное число m назовем хорошим, если числа $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$ можно разбить на два множества так, чтобы сумма чисел в одном из них была в m раз больше, чем в другом. Докажите, что минимальное хорошее число взаимнопросто с числом k.

5. Имеется набор из $2n$ чисел, находящихся в отрезке $[1;2]$. Доказать, что их можно разбить на две группы так, что суммы чисел s_1, s_2 в этих группах удовлетворяют условию $\frac{n}{n+1} \leqslant \frac{s_1}{s_2} \leqslant 1$.

6. В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причем ни одна изюминка не весит больше $1+x$ г. При каком наибольшем значении x заведомо можно разложить весь изюм на две чаши весов так, чтобы они показали разность, не превосходящую 1 г?

7. При каком наибольшем натуральном k из любого набора из $2n$ целых чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_{2n} таких, что $-n \leqslant x_i \leqslant n$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} = k$, можно выбрать несколько чисел с суммой 0?