

Серия 8. Танки грязи не боятся.

1. В остроугольном треугольнике ABC $AB < AC$. Пусть ω – его описанная окружность. Обозначим как t_B и t_C касательные к ω в точках B и C , соответственно, и пусть L – их точка пересечения. Прямая, проходящая через точку B и параллельная AC , пересекает t_C в точке D . Прямая, проходящая через точку C и параллельная AB , пересекает t_B в точке E . Описанная окружность треугольника BDC пересекает AC в точке T так, что T лежит между A и C . Описанная окружность треугольника BEC пересекает прямую AB (или её продолжение) в точке S так, что B лежит между S и A . Докажите, что прямые ST , AL , и BC пересекаются в одной точке.
2. Дана окружность w с диаметром AB . Точки $C, D \in w$ и лежат по разные стороны от AB . Прямая, проходящая через C и параллельная AD , пересекает AB в точке F . Прямая, проходящая через D и параллельная AC , пересекает AB в точке E . Прямая, проходящая через E и перпендикулярная AB , пересекает BD в точке X . Прямая, проходящая через F и перпендикулярная AB , пересекает BC в точке Y . Докажите, что периметр $\triangle AXY$ равен $2CD$.
3. Окружность с центром O касается сторон угла BAC в точках B и C . Точка P внутри угла такова, что OPA – прямой. Q – произвольная точка на продолжении отрезка AP за точку P . Окружности ω_1, ω_2 описаны вокруг треугольников PQB и CPQ соответственно и пересекают прямую OP в точках M и N . Докажите, что O – середина MN .
4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Точки M и N являются проекциями B и C на AD . Окружность с диаметром MN пересекает BC в точках X и Y . Докажите, что $\angle BAX = \angle CAU$.
5. Окружность с центром I , вписанная в грань ABC треугольной пирамиды $SABC$, касается отрезков AB, BC, CA в точках D, E, F соответственно. На отрезках SA, SB, SC отмечены соответственно точки A', B', C' так, что $AA' = AD, BB' = BE, CC' = CF$; S' – точка на описанной сфере пирамиды, диаметрально противоположная точке S . Известно, что SI является высотой пирамиды. Докажите, что точка S' равноудалена от точек A', B', C' .
6. Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P . Описанные окружности треугольников BPC_1 и CPB_1 пересекаются второй раз в точке M_A . Аналогично определяются точки M_B и M_C . Докажите, что прямые AM_A, BM_B и CM_C пересекаются в одной точке.
7. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA и AB в точках A', B' и C' соответственно. Перпендикуляр из центра I этой окружности на медиану из вершины C пересекает прямую $A'B'$ в точке K . Докажите, что $CK \parallel AB$.
8. Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром O . Прямая AO пересекает перпендикуляр из C к BD в точке E , прямая CO пересекает перпендикуляр из точки A к BD в точке F , а диагонали AC и BD пересекаются в точке G . Докажите, что E, F , и G лежат на одной прямой.