Серия 7. Неравенства.

1. Сумма нескольких положительных чисел равна 1. Докажите, что какое-то из чисел больше суммы квадратов остальных.

О выборе более удобных условий.

3. Положительные $x_1, x_2, \ldots x_n$ таковы, что

$$\frac{1}{x_1+2019}+\frac{1}{x_2+2019}+\ldots+\frac{1}{x_n+2019}=\frac{1}{2019}.$$

Докажите, что $\dfrac{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}{n-1} \geqslant 2019$.

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Докажите, что $a+b+c \leqslant 3$.

Ещё про квадратичную функцию.

5(повторение). Рассмотрев дискриминант трёхчлена $f(x)=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\ldots+(a_nx+b_n)^2$, докажите **неравенство Коши-Буняковского-Шварца.**

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots b_n^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+\ldots a_nb_n)^2.$$

6. Для произвольных a, b, c докажите неравенство

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geqslant 9(ab+bc+ca).$$

7. Для различных действительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2} \geqslant 2.$$

Немного про pqr-метод.

8. Попарно различные положительные a, b, c, x, y, z таковы, что $a+b+c=x+y+z$, $a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2$, а $a^3+b^3+c^3>x^3+y^3+z^3$. Докажите, что $a^n+b^n+c^n>x^n+y^n+z^n$ при
а) $n=4$;
б) $n=5$;
в) $n=6$.

9. а) Для произвольных a, b, c обозначим $a+b+c=p$, $ab+bc+ca=q$, $abc=r$. Выразите через p, q и r многочлен $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$.
б) Даны действительные числа p, q и r. Докажите, что уравнение t^3-pt^2+qt-r имеет три неотрицательных корня тогда и только тогда, когда $-4p^3r+p^2q^2+18pqr-4q^3-27r^2 \geqslant 0$.
в) Сформулируйте и докажите критерий положительности корней.
г) Представим себе, что p и q из пункта а) зафиксированы, тогда при изменении r как-то будут меняться числа a, b, c. Поэтому их можно считать функциями от r. Опустим момент, почему эти функции дифференцируемы на отрезке, на котором r вообще может находиться. Продифференцировав систему из пункта а), найдите a', b' и c'.
д) Даны неотрицательные a, b, c, u, v, w такие, что

$$a+b+c=u+v+w, \quad ab+bc+ca=uv+vw+wu, \quad abc \geq uvw.$$

Функция $f(u)$ такова, что $f'''(u) \geqslant 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$. Докажите, что $f(a)+f(b)+f(c) \geqslant f(u)+f(v)+f(w)$.
Подсказка, посмотрите на $f(a)+f(b)+f(c)$ как на функцию от r.