Серия 6. Разнобой.

1. В классе учатся несколько мальчиков и девочек. У каждого мальчика есть хотя бы одна подруга, при этом у него количество подруг хотя бы вдвое больше, чем количество друзей у любой из его подруг. Докажите, что девочек хотя бы вдвое больше, чем мальчиков.

2. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c, $d \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$(ab-cd)(ac+bd)(ad-bc)+\min(a,b,c,d)<1$$

3. Дана выпуклая четырехугольная пирамида с вершиной S и основанием $ABCD$, причём существует сфера, вписанная в эту пирамиду. Пирамиду разрезали по рёбрам SA, SB, SC, SD и отогнули грани SAB, SBC, SCD, SDA вовне на плоскость $ABCD$ так, что получился многоугольник $AKBLCMDN$. Докажите, что точки K, L, M, N лежат на одной окружности.

4.Дано натуральное число $m \geqslant 2$. Последовательность натуральных чисел $(b_0, b_1, \ldots, b_m)$ назовём *вогнутой*, если $b_k + b_{k-2} \leqslant 2b_{k-1}$ для всех $2 \leqslant k \leqslant m$. Докажите, что существует не более 2^m вогнутых последовательностей, начинающихся с $b_0 = 1$ и $b_1 = 2$.

5. Даны натуральные числа a, b, c, d такие, что числа a и b взаимно просты и $a > b$. Известно, что c^2 делится на a^2+b, а число d^2 делится на a^2+b^2. Докажите, что $cd > 2a^2$.

6. Среди любых $2d+2$ вершин графа можно выбрать d таких, что каждое ребро, соединяющее две из этих $2d+2$ вершин, содержит хотя бы одну из выбранных. Докажите, что вершины графа можно раскрасить в $d+1$ цвет так, чтобы концы каждого ребра были разноцветными.

7. В клетках таблицы $n \times n$ расставлены остатки по модулю m. Каждую минуту к числу в каждой клетки прибавляется сумма чисел в соседних с ней клетках по стороне или вершине. Разрешается раз в минуту выбрать клетку и прибавить к числу в ней 1, либо же не делать ничего. Докажите, что можно через некоторое время сделать все остатки нулями.