

## Серия 36. Кооперативные алгоритмы.

1. (a) Алисе и Бобу надевают на голову шляпу. Каждая из шляп может быть черной или белой. Каждый видит чужую шляпу, но никто не видит при этом своей шляпы. После этого по команде одновременно каждый из них должен назвать цвет — «черный» или «белый». Если хоть один из них угадал цвет своей шляпы — они выиграли. Перед тем как всё это произойдет, им дали возможность посоветоваться. Как им следует действовать, чтобы в любой ситуации выиграть?
  - (b) А удалось ли бы им выиграть, если бы цветов было три, а не два?
  - (c) То же самое, но число цветов увеличивается до четырёх, а к Алисе и Бобу присоединяются Вика и Гена.
  - (d) Докажите, что из  $n$  людей при  $n$  цветах можно договориться так, чтобы хотя бы один угадал.
  - (e) А если цветов больше, чем людей — то нельзя.
2. Пусть есть  $n$  людей и шляпы  $n$  цветов, все видят цвета всех, остальных, кроме одного исключения: Алисе запрещено смотреть на Боба. Есть ли у них такая стратегия, чтобы хотя бы один гарантированно угадал свой цвет?
3. Алисе и Бобу на лбу написали по одному рациональному числу. После этого каждый из них должен написать на бумажке конечный набор рациональных чисел. Каждый видит число на лбу у другого, но не своё. Могут ли они так договориться заранее, чтобы в наборе хотя бы одного из них встретилось его число?
4. Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому на голову колпак одного из 1000 цветов. После этого им глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек — белую или чёрную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Удастся ли это?
5. При каком наименьшем  $N$  возможен такой фокус? Помощник фокусника просит одного из зрителей написать на доске в ряд  $N$  цифр. Затем помощник фокусника стирает одну из них и покидает помещение. После этого появляется фокусник. Глядя на оставшиеся цифры, фокусник безошибочно отгадывает, какая цифра была стёрта.
6. (a) Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), после чего зритель выбирает одну из них. Далее первый участник выкладывает карты в ряд слева направо, причём выбранную зрителями кладет рубашкой вверх, а остальные — картинкой вверх. Вторым участником фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.
  - (b) Вторым фокус отличается от первого тем, что закрытая карта может быть только с левого или правого края.
7. За круглым столом сидят 99 мудрецов, а также есть 50 чёрных и 50 белых шляп. Ведущий прячет одну шляпу, а остальные надевает на головы мудрецам. Все видят всех и одновременно называют цвета.
  - (a) Могут ли свой цвет гарантированно угадать 75 мудрецов?
  - (b) 74 мудреца?