Серия 35. Разнобой.

1. На доске написано число 2019. За одну операцию разрешается дописать на доску натуральное число так, чтобы среднее арифметическое всех чисел на доске было целым и меньше, чем среднее арифметическое на прошлом шаге. Какое наибольшее количество чисел можно выписать на доску?

2. Точки A, B, C на плоскости отмечены так, что $AB = BC = CA = 6$. На каждом шаге вы можете выбрать любые три отмеченные точки и отметить центр описанной окружности образованного ими треугольника. Докажите, что можно отметить точку на расстоянии больше 2020 от центра начальных трёх точек.

3. (Письменно) В кошельке у Давида находится несколько монет попарно различных натуральных номиналов. Может ли так оказаться, что существует ровно 2020 способов выбрать несколько монет с суммой 2020?

4. (Письменно) Пусть a_n — последовательность, состоящая из точных степеней в порядке возрастания. Так, начало a_n выглядит как $1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, \ldots$. Докажите, что найдётся бесконечно много таких n, что $9999|(a_{n+1} - a_n)$.

5. По кругу стоят $n > 10$ фишек, изначально все чёрные. За одну операцию разрешается выбрать три подряд идущие фишки, самая левая из которых — чёрная, поменять цвет второй из них (с чёрного на белый и наоборот), а затем первую (т.е. левую) поставить на третье место, третью на второе, а вторую на первое. Докажите, что с помощью таких операций можно получить любое расположение фишек, в котором есть хотя бы одна чёрная.

6. Точки P и Q отметили внутри параллелограмма $ABCD$ так, что треугольники ABP и BCQ равносторонние. Докажите, что пересечение прямой, проходящей через P перпендикулярно PD и прямой, проходящей через Q перпендикулярно DQ лежит на высоте из точки B треугольника ABC.

7. Докажите, что для $n > 1$ и действительных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, k$ с условием $a_1 = a_{n-1} = 0$,

$$|a_0| - |a_n| \leqslant \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ka_{i+1} - a_{i+2}|.$$