Серия 34. Многочлены от многих переменных. Часть 1.

1. a) Существуют ли многочлены $a(x)$ и $b(x)$ такие, что $1 + xy + x^2y^2 = a(x)b(y)$?

b) Существуют ли многочлены $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и $d(x)$ такие, что $1+xy+x^2y^2 = a(x)b(y)+c(x)d(y)$?

Цель следующей задачи — доказать «основную теорему арифметики» для многочленов от n переменных. Надеюсь, что для $n = 1$ она известна.

2. Как вы знаете, на многочлены от двух переменных x, y с рациональными коэффициентами можно смотреть как на многочлены от x с коэффициентами в $\mathbb{Q}[y]$:

$$P(x, y) = Q_n(y)x^n + \ldots + Q_1(y)x + Q_0(y).$$

a) Рассмотрим множество многочленов от x с коэффициентами в $\mathbb{Q}(y)$, то есть множество рациональных функций вида

$$f(x, y) = \frac{P_n(y)}{Q_n(y)}x^n + \ldots + \frac{P_1(y)}{Q_1(y)}x + \frac{P_0(y)}{Q_0(y)}.$$

Будем обозначать его как $\mathbb{Q}(y)[x]$

Как и в случае целых гауссовых чисел (и абстрактных колец), мы будем называть рациональную функцию $f \in \mathbb{Q}(y)[x]$ *обратимой*, если существует рациональная функция $g \in \mathbb{Q}(y)[x]$ такая, что $f \cdot g = 1$ (везде, где определена).

Мы будем называть рациональную функцию $f \in \mathbb{Q}(y)[x]$ *простой*, если её нельзя представить как произведение $f = g \cdot h$, где $g, h \in \mathbb{Q}(y)[x]$ и g, h не обратимы.

Докажите, что в $\mathbb{Q}(y)[x]$ есть деление с остатком, и выведете из этого, что любая функция $f \in \mathbb{Q}(y)[x]$ однозначно раскладывается на простые множители.

b) Пусть

$$\frac{P(x, y)}{Q(y)} = \frac{P_1(x, y) \cdot P_2(x, y)}{Q_1(y) \cdot Q_2(y)},$$

и обе дроби несократимы. Докажите, что существует число $c \in \mathbb{Q}$ такое, что

$$P(x, y) = c \cdot P_1(x, y) \cdot P_2(x, y)$$

Указание: воспользуйтесь «основной теоремой арифметики» для $\mathbb{Q}[y]$

c) Докажите «основную теорему арифметики» для $\mathbb{Q}[x, y]$.
(доказательства для $\mathbb{R}[x, y]$ *и* $\mathbb{C}[x, y]$ *будут аналогичными)*

d) Докажите «основную теорему арифметики» для $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$.
(доказательства для $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ *и* $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ *будут аналогичными)*

e*) Докажите «основную теорему арифметики» для $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$.

3. Найдите все пары многочленов $(P(x, y), Q(x, y))$ такие, что

$$P(4x - 3y, 3x + 4y)P(5x, 5y) = (x^2 + y^2 - 1)Q(4x - 3y, 3x + 4y)Q(5x, 5y)$$

4. a) Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$. Известно, что для некоторого многочлена $R(x, y)$ выполнено

$$P(x) - P(y) = R(x, y) \cdot (Q(x) - Q(y))$$

Докажите, что существует многочлен $S(x)$ такой, что $P(x) = S(Q(x))$.

b) Даны многочлены $P(x)$ и $q(x)$ с вещественными коэффициентами, причём количество различных вещественных корней многочлена $q(x)$ равно его степени. Известно, что если $q(a) = q(b)$, то $P(a) = P(b)$. Докажите, что существует такой многочлен $Q(x)$, что $P(x) = Q(q(x))$.

Серия 34. Многочлены от многих переменных. Часть 2.

1. Наибольший общий делитель натуральных чисел k, l, m равен 1.
Докажите, что НОД$(k+l+m, k^2+l^2+m^2, k^3+l^3+m^3)$ — делитель числа 6.

2. Найдите все многочлены с целыми коэффициентами такие, что $a^2+b^2-c^2$ делит $P(a)+P(b)-P(c)$ для любых целых a, b, c таких, что $a^2+b^2-c^2 \neq 0$.

3. a) Пусть дан многочлен $Q(x_1, \ldots, x_n)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что существует многочлен $P(x_1, \ldots, x_n)$ с рациональными коэффициентами такой, что $P(x_1^{2020}, \ldots, x_n^{2020})$ делится на $Q(x_1, \ldots, x_n)$.

b) Пусть даны многочлены $Q(x, y)$ и $f(x)$ с рациональными коэффициентами, причём $deg(f) \geqslant 1$. Докажите, что существует многочлен $P(x, y)$ с рациональными коэффициентами такой, что $P(f(x), y)$ делится на $Q(x, y)$.

c) Пусть даны многочлены $Q(x_1, \ldots, x_n)$ и $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ с рациональными коэффициентами, причём $deg(f_1) \geqslant 1$. Докажите, что существует многочлен $P(x_1, \ldots, x_n)$ с рациональными коэффициентами такой, что $P(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))$ делится на $Q(x_1, \ldots, x_n)$.

4. Дано натуральное число n. Назовём k *интерполяционным*, если для любых n точек общего положения с координатами (x_i, y_i) и любых n числел c_i существует многочлен $P(x, y)$ такой, что

(i) $P(x_i, y_i) = c_i$ для $i = 1, \ldots, n$;

(ii) степень $P(x, y)$ не больше k.

Докажите, что минимальное интерполяционное k — это $[\frac{n}{2}]$