

Серия 33. Бесконечность

Странный это был отдел. Лозунг у них был такой: «Познание бесконечности требует бесконечного времени». С этим я не спорил, но они делали из этого неожиданный вывод: «А потому работай не работай — все едино». И в интересах неувеличения энтропии Вселенной они не работали.

Стругацкие, «Понедельник начинается в субботу»

1. Докажите, что из бесконечной последовательности различных натуральных чисел можно выделить бесконечную возрастающую подпоследовательность.
2. Андрей построил последовательность из 2020 различных натуральных чисел, где для любого $k \leq 2020$ сумма первых k чисел делилась на k . Докажите, что последовательность можно продолжить до бесконечности с сохранением условия о делимости и так, чтобы каждое натуральное число встретилось ровно один раз.
3. Лиза и Полина по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Лиза своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, Полина — одну цифру. Так продолжается, пока не будет выписана вся бесконечная дробь. Если в итоге она получится периодической (без предпериода), выигрывает Лиза, иначе — Полина. Кто имеет выигрышную стратегию?
4. Имеется язык, состоящий из всевозможных слов в конечном алфавите. Некоторые слова являются нецензурными. Слово называется литературным, если не содержит нецензурных подслов. Известно, что существует сколь угодно длинное литературное слово. Докажите, что существует бесконечное литературное слово.
5. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует одноцветная бесконечная арифметическая прогрессия?
6. Докажите, что существуют такие два бесконечных множества целых неотрицательных чисел A и B , что любое целое неотрицательное число единственным образом представляется в виде $a + b$, где $a \in A$ и $b \in B$.

Серия 33. Бесконечность

Странный это был отдел. Лозунг у них был такой: «Познание бесконечности требует бесконечного времени». С этим я не спорил, но они делали из этого неожиданный вывод: «А потому работай не работай — все едино». И в интересах неувеличения энтропии Вселенной они не работали.

Стругацкие, «Понедельник начинается в субботу»

1. Докажите, что из бесконечной последовательности различных натуральных чисел можно выделить бесконечную возрастающую подпоследовательность.
2. Андрей построил последовательность из 2020 различных натуральных чисел, где для любого $k \leq 2020$ сумма первых k чисел делилась на k . Докажите, что последовательность можно продолжить до бесконечности с сохранением условия о делимости и так, чтобы каждое натуральное число встретилось ровно один раз.
3. Лиза и Полина по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Лиза своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, Полина — одну цифру. Так продолжается, пока не будет выписана вся бесконечная дробь. Если в итоге она получится периодической (без предпериода), выигрывает Лиза, иначе — Полина. Кто имеет выигрышную стратегию?
4. Имеется язык, состоящий из всевозможных слов в конечном алфавите. Некоторые слова являются нецензурными. Слово называется литературным, если не содержит нецензурных подслов. Известно, что существует сколь угодно длинное литературное слово. Докажите, что существует бесконечное литературное слово.
5. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует одноцветная бесконечная арифметическая прогрессия?
6. Докажите, что существуют такие два бесконечных множества целых неотрицательных чисел A и B , что любое целое неотрицательное число единственным образом представляется в виде $a + b$, где $a \in A$ и $b \in B$.