Серия 31. Многочлены под разными углами.

1. Назовём многочлен $P(x)$ *разнообразным*, если для любых натуральных m и n найдётся такое целое a, что $P(a^m)$ делится на n. Докажите, что все разнообразные многочлены — это многочлены, у которых или 0, или 1 является корнем.

2. Последовательность $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ задана соотношениями

$$P_0(x) = x, \quad P_n(x) = P_{n-1}(x-1)P_{n-1}(x+1), n \geqslant 1.$$

Найдите наибольшее такое k, что P_{2020} делится на x^k.

3. Докажите, что для любых ненулевых многочленов P и R с рациональными коэффициентами существует многочлен Q такой, что $P(x)|Q(R(x))$

4. Найдите все такие многочлены $p(x)$ с вещественными коэффициентиами, удовлетворяющие условию: существует такой многочлен $q(x)$ с вещественными коэффициентами, что $p(1) + p(2) + \ldots + p(n) = p(n)q(n)$.

5. Дано натуральное число n. Существует ли такой многочлен $f(x)$ степени n с рациональными коэффициентами, не все из которых целые, многочлен $g(x)$ с целыми коэффициентами и различные целые числа $a_1, \ldots, a_{n+1}$ такие, что $f(a_i) = g(a_i)$ для всех $i = 1, \ldots, n+1$.

6. Докажите, что если для некоторого положительного p верно равенство $\frac{a_1}{p+1} + \frac{a_2}{p+2} + \ldots + \frac{a_n}{p+n} = 0$, то многочлен $f(x) = a_n x^{n-1} + \ldots + a_2 x + a_1$ имеет корень на интервале $(0, 1)$.

7. Даны многочлены $P(x)$ и $q(x)$ с вещественными коэффициентами, причём количество различных вещественных корней многочлена $q(x)$ равно его степени. Известно, что если $q(a) = q(b)$, то $P(a) = P(b)$. Докажите, что существует такой многочлен $Q(x)$, что $P(x) = Q(q(x))$.

8. Найдите все многочлены $p(x)$ нечётной степени с вещественными коэффициентами такие, что $p(x^2-1) = p^2(x)-1$.