Серия 2. Разнобой.

1. Последоватльность натуральных чисел a_n задаётся правилом $a_1 = a$, $a_2 = b$, где a и b — натуральные, а для всех $n \geqslant 2$ a_{n+1} равно количеству индексов i, $1 \leqslant i \leqslant n$, таких, что $a_i = a_n$. Например, для $a = 2, b = 1$ начало последовательности будет выглядеть так: (2; 1; 1; 2; 2; 3 ...). Найдите все пары натуральных чисел (a, b), для которых, начиная с некоторого места последовательность $(a_n + a_{n+1})$ будет неубывающей.

2. Числа $1, 2, \ldots, n$ в некотором порядке расставлены в ряд. С ними разрешается проделать такую операцию: взять две пары соседних элементов, не имеющих общих членов, и поменять эти пары местами. Всегда ли можно за несколько операций получить монотонный (возрастающий или убывающий) набор чисел, если

а) $n = 2009$; б) $n = 2010$?

3. Есть 288 монет. Из них 144 настоящих, 144 фальшивых. Внешне все монеты естественно неотличимы. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые тоже. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах выяснить, отличается ли масса фальшивой и настоящей монеты?

4. Натуральное число n таково, что $3n + 1$ и $10n + 1$ являются квадратами натуральных чисел. Докажите, что число $29n + 11$ — составное.

5. На окружности с диаметром AC выбрана произвольная точка B, отличная от A и C. Пусть M, N — середины хорд AB, BC, а P, Q — середины меньших дуг, стягиваемых этими хордами. Прямые AQ и BC пересекаются в точке K, а прямые CP и AB — в точке L. Докажите, что прямые MQ, NP и KL пересекаются в одной точке.

6. Вдоль прямой стоят n грузов, масса каждого — число из $(0, 1)$. Блок — это любой набор подряд стоящих грузов, масса блока — это сумма масс его грузов. Докажите, что при любом k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ грузы можно разбить на k непересекающихся блоков так, что максимальная из масс блоков не превосходит минимальной, увеличенной на 1.

7. В неравностороннем треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а точка O — центр описанной окружности. Прямая s проходит через I и перпендикулярна прямой IO. Прямая ℓ, симметричная прямой BC относительно s, пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно (K и L отличны от A). Докажите, что центр описанной окружности треугольника AKL лежит на прямой IO.

8. Let $d(n)$ be the number of positive divisors of a positive integer n. Let $\mathbb{N}$ be the set of all positive integers. Say that a bijection F from $\mathbb{N}$ to $\mathbb{N}$ is divisor-friendly if $d(F(mn)) = d(F(m))d(F(n))$ for all positive integers m and n. Does there exist a divisor-friendly bijection?