Серия 28. Условные вероятности и независимость.

Определение. Условной вероятностью события A при наступлении события B (обозначается как $P(A|B)$) называется отношение вероятности одновременного наступления событий A и B к вероятности события B, т.е. $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

1. Пусть A_1, A_2, …, A_n — какие-то события. За $\overline{A_i}$ будем обозначать дополнения событий A_i. Докажите, что

а)

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_{n-1}A_{n-2}\dots A_1)$$

б)

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}) = (1-P(A_1))\cdot(1-P(A_2|\overline{A_1}))\cdot\ldots\cdot(1-P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1}\overline{A_i}))$$

2. Доля больных одним редким заболеванием, всего-то $0,01\%$. Лаборатория особо важных исследований разработала анализ, проверяющий на наличие этого заболевания. При этом вероятность ложно-отрицательного результата (то есть, когда анализ показывает, что человек здоров, хотя он на самом деле болен) равна $0,01$, а вероятность ложно-положительного результата (то есть, когда анализ показывает, что человек болен, хотя он на самом деле здоров) равна $0,001$. Анализ показал, что человек болен. Какова вероятность того, что у него на самом деле это редкое заболевание?

3. Жители города Н. любят после работы, которая у каждого заканчивается в случайное время, уделить некоторое время рыбалке. В озере водятся караси и лещи, причем доля лещей равна p. В городе действует закон, запрещающий ловить более чем одного леща за день, а горожане исключительно законопослушны и после первой поимки леща сразу возвращаются домой. Найти долю лещей среди всей пойманной в городе рыбы.

Определение. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *независимыми*, если вероятность того, что происходят несколько из них равна произведению вероятностей этих событий, т.е. для любых различных A_{i1}, A_{i2}, …, A_{ik}

$$P(A_{i1}\cap A_{i2}\cap\ldots\cap A_{ik}) = P(A_{i1})\cdot P(A_{i2})\dots P(A_{ik})$$

4. Пусть события A_1, A_2, …, A_n независимы.

а) Докажите, что для любого подмножества $M = A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik}$ множества $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ условная вероятность события A_n при условии одновременного наступления всех событий множества M, равна $P(A_n)$.

б) Докажите, что если часть A_i заменить на их дополнения, а часть оставить как раньше, то полученные n событий тоже будут независимыми.

5. Пусть события A и B независимы. Верно ли, что $P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$, где C — некоторое событие?

6. Для любого $n > 2$ приведите пример событий A_1, A_2, …, A_n таких, что любые $n-1$ из них независимы, а все вместе они зависимы.

7. Какое наименьшее количество элементарных исходов может быть, если существует n независимых событий, вероятности которых не равны 0 и 1?

8. Дальноземье постоянно страдает от стихийных бедствий. Частенько бывают наводнения, засухи, извержения вулкана и ураганы. Для каждого из этих четырёх стихийных бедствий вероятность того, что оно произойдёт за год, равняется $\frac{1}{2}$. За год не происходит больше одного стихийного бедствия каждого из типов.

а) Докажите, что обязательно найдётся пара стихийных бедствий таких, что вероятность того, что в году произойдут эти два стихийных бедствия, не меньше $\frac{1}{6}$.

б) Докажите, что оценку из пункта а) улучшить нельзя.

9. За бесконечным (в обе стороны) столом сидит счётное число школьников, решающих задачу. Для каждого школьника вероятность решить ее самостоятельно равна $1/2$. Также с вероятностью $1/4$ ему удастся подсмотреть в тетрадь соседа слева, и с вероятностью $1/4$ — в тетрадь соседа справа. Все эти события (для всех школьников) независимы между собой. Если кто-то из школьников получил решение задачи, то каждый подсмотревший к нему в тетрадь также его получает. Найти вероятность, что сидящий в ряду школьник Кузя получит решение задачи.

Домашнее задание

10. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает окружность, описанную около треугольника AIC, в точках D и E. Точка F на отрезке B_1C выбрана так, что $AB_1 = CF$. Докажите, что точки B, D, E и F лежат на одной окружности

11. Сумму

$$\frac{2}{3 \cdot 6} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \ldots + \frac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2015}{3 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2019}$$

записали в виде десятичной дроби. Найдите первую цифру после запятой.

12. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность с центром в точке O_b проходит через точки A, C_1 и середину отрезка BH. Окружность с центром в точке O_c проходит через точки A, B_1 и середину отрезка CH. Докажите, что $B_1O_b + C_1O_c > \frac{BC}{4}$.