Серия 26. Снова про линейное и ещё разнообразное.

1. а) Дана белая доска 8×8. За один ход можно сменить (с чёрного на белый, с белого на чёрный) цвет в любой строке или любом столбце. Можно ли сделать так, чтобы на обеих главных диагоналях клетки стали чёрные, а остальные остались белыми?
б)Петя прошёл тему “Инварианты”. В ней было несколько задач, в которых клетки доски были покрашены в два цвета и можно было менять цвет всех клеток в некоторых областях (то, какие области разрешены, и задаёт задачу). Сначала Пете помогала, что чётность числа чёрных клеток во всей таблице не меняется, затем оказалось, что иногди приходится доказывать, что не меняется чётность числа чёрных клеток в определённой области. Докажите, что какая бы ни была задача, если из одной раскраски нельзя получить другую, то это можно доказать, найдя область в которой чётность количества чёрных клеток не меняется.

2. У Карлсона есть 1000 банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой не больше, чем сотая часть всего варенья. Карлсон считает завтрак правильным, если во время него он съедает поровну варенья из каких-то 100 банок и не трогает остальные. Докажите, что Карлсон может съесть все варенье за несколько правильных завтраков.

3. В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор *подписчиков* среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг — целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользователя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью.
Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей стали равны 0. Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и изменить его рейтинг как угодно (в частности оставить тем же). Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели.

4. Дано простое число $p > 2^{1000}$. Имеется клетчатая таблица 10×10, в её граничных клетках расставлены остатки при делении на p. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника 8×8 можно расставить числа так, чтобы каждое из этих 64 остатков равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.

5. В бригаде 13 рабочих. В цеху 10 станков. Обучение одного рабочего использованию одного станка стоит N рублей. За какую наименьшую сумму можно обеспечить, чтобы любые 10 рабочих могли бы занять все станки?

6. Вычислите квадратный корень из числа $0,111\dots111$ (100 единиц) с точностью а) 100; б) 101; в*) 200 знаков после запятой.

7. Пусть a — положительный корень уравнения $x^{2017} - x - 1 = 0$,
а b — положительный корень уравнения $y^{4034} - y = 3a$.
а) Сравните a и b.
б) Найдите десятый знак после запятой числа $|a - b|$.

8. В пространстве расположены четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует параллилепипедов, у которых все эти точки являеются вершинами?

9. Three circles k_1, k_2, and k_3 intersect in point O. Let A, B, and C be the second intersection points (other than O) of k_2 and k_3, k_1 and k_3, and k_1 and k_2, respectively. Assume that O lies inside of the triangle ABC. Let lines AO, BO, and CO intersect circles k_1, k_2, and k_3 for a second time at points A', B', and C', respectively. If $|XY|$ denotes the length of segment XY, prove that $\frac{|AO|}{|AA'|} + \frac{|BO|}{|BB'|} + \frac{|CO|}{|CC'|} = 1$.