

Серия 25. Сечения и проекции.

1. Внутри куба с ребром 1 разместили несколько треугольников, сумма площадей которых больше 3. Докажите, что какие-то два треугольника можно проткнуть иглой, параллельной одному из рёбер куба.

2. В некоторых целых неотрицательных (то есть все координаты неотрицательные) точках многомерного пространства стоят прожектора. Каждый прожектор освещает все точки с координатами не меньше своих. Докажите, что можно оставить лишь конечное число прожекторов, чтобы множество освещённых точек не изменилось.

3. Каждая сторона правильного треугольника разбита на n равных отрезков, и через все точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Данный треугольник разбился на n^2 маленьких треугольников-клеток. Треугольники, расположенные между двумя соседними параллельными прямыми, образуют полосу. Какое наибольшее число клеток можно отметить, чтобы никакие две отмеченные клетки не принадлежали одной полосе ни по одному из трёх направлений?

4. Пусть A — конечное множество точек в трехмерном пространстве, A_x, A_y, A_z — его проекции на плоскости $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ соответственно. Докажите, что

$$|A|^2 \leq |A_x| |A_y| |A_z|.$$

5. В графе K ребер и T треугольников. Докажите, что $9T^2 \leq 2K^3$.

6. Квадрат с целой стороной разрезан на одинаковые прямоугольники с целыми сторонами. Обозначим F объединение прямоугольников, которые пересекает диагональ квадрата (даже по точке). Докажите, что диагональ делит F на две равновеликие части.

7. Шеренга состоит из N ребят попарно различного роста. Её разбили на наименьшее возможное количество групп стоящих подряд ребят, в каждой из которых ребята стоят по возрастанию роста слева направо (возможны группы из одного человека). Потом в каждой группе переставили ребят по убыванию роста слева направо. Докажите, что после $N - 1$ такой операции ребята будут стоять по убыванию роста слева направо.

8. В некоторой стране из каждого города в другой можно проехать, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлены два маршрута поездок по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении первого маршрута руководствовались следующим принципом: начальный пункт маршрута выбрали произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут ещё не прошёл, выбирали тот, поездка в который из предыдущего города имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирали любой из них), и так до тех пор, пока не пройдены все города. При составлении второго маршрута начальный город тоже выбрали произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут ещё не прошёл, выбирали тот, поездка в который из предыдущего города имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршруту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту.