

Серия 20. Разнобойная.

1. Натуральное число n таково, что ни при каких натуральных a и b число $2^a 3^b + 1$ не делится на n . Докажите, что $2^c + 3^d$ также не делится на n ни при каких натуральных c и d .
2. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$ — перестановка чисел $1, 2, \dots, 2020$. Какое наибольшее количество чисел среди чисел $a_1^2 + a_2, a_2^2 + a_3, \dots, a_{2019}^2 + a_{2020}, a_{2020}^2 + a_1$ могут быть точными квадратами?
3. Ринат и Марат играют в игру «Морской бой-2000». На доске 1×200 они по очереди ставят на свободные клетки доски букву «S» или «O», начинает Ринат. Выигрывает тот, кто первым получает слово «SOS». Каков результат игры при правильной игре?
4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1 и CC_1 . Биссектриса угла AA_1C пересекает отрезки CC_1 и CA в точках E и D соответственно. Биссектриса угла AA_1B пересекает отрезки BB_1 и BA в точках F и G соответственно. Описанные окружности треугольников FA_1D и EA_1G пересекаются в точках A_1 и X . Докажите, что $\angle BXC = 90^\circ$.
5. Биссектриса угла CAB треугольника ABC пересекает сторону CB в точке L . Точка D — основание перпендикуляра из вершины C на AL , а точка E — основание перпендикуляра из точки L на AB . Прямые CB и DE пересекаются в точке F . Докажите, что AF — высота в треугольнике ABC .
6. Для каждого натурального числа $n \geq 2$ рассмотрим последовательность $a_k = \text{lcm}(k, k+1, \dots, k+(n-1))$. Найдите все такие n , для которых последовательность a_k начиная с какого-то момента строго возрастает.
7. Найдите все такие натуральные n , для которых все натуральные делители n можно расположить в клетках какой-нибудь прямоугольной таблицы так, чтобы выполнялись условия:
 - (i) в каждой клетке расположен делитель, все они различны
 - (ii) сумма чисел в каждом столбце одна и та же
 - (iii) сумма чисел в каждой строке одна и та же.
8. Дано натуральное n , взаимно простое с 6. Вершины правильного n -угольника раскрасили в три цвета так, что вершин каждого цвета — нечётное число. Докажите, что существует равнобедренный треугольник с вершинами трёх разных цветов.