Кружок в "Хамовниках". 2019-2020 учебный год. 11 класс. Группа 11-1.

Серия 1. Теорема Кронекера.

Теория.

1. Кузнечик прыгает по окружности длины 1. За каждую секунду он прыгает по часовой стрелке на дугу длины α, где α — иррациональное число. Докажите, что не позже чем через 1000 секунд он окажется на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от своего исходного положения (расстояние считается по окружности).

2. а) Два кузнечика прыгают по окружности длины 1. Они стартуют одновременно из одной точки и за каждую секунду первый прыгает по часовой стрелке с шагом длины α, а второй – с шагом длины β. Докажите, что в какой-то момент времени (не позднее чем через 1000^2 секунд) оба кузнечика одновременно окажутся на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от исходной точки.

б) Та же задача для n кузнечиков и 1000^n секунд.

3. Две мошки ползут по окружности длины 1 по часовой стрелке с постоянными скоростями, причем отношение этих скоростей иррационально. Они стартуют одновременно из какиих-то начальных точек, возможно разных. Докажите, что в какой-то момент обе мошки одновременно окажутся на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от фиксированной точки A.

4. Два кузнечика прыгают по окружности длины 1. Они стартуют одновременно из каких-то начальных точек, возможно разных, и за каждую секунду первый прыгает по часовой стрелке с шагом длины α, а второй - с шагом длины β, причем $k\alpha + l\beta \notin \mathbb{Z}$ для $k, l \in \mathbb{Z},\ (k, l) \neq 0$. Докажите, что в какой-то момент времени оба кузнечика одновременно окажутся на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от фиксированной точки A.

5. Три мошки ползут по единичной окружности по часовой стрелке с постоянными скоростями $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$. Они стартуют одновременно из каких-то начальных пунктов, возможно разных. Докажите, что в какой-то момент времени все три мошки одновременно окажутся на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от фиксированной точки A.

6. Та же задача про трех кузнечиков с соответствующими длинами прыжков.

7. Числа $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *рационально независимы*, т.е. если для некоторых рациональных $c_0, c_1, \ldots c_n$ выполнено $c_0 + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_n\alpha_n = 0$, только когда $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$. Тогда докажите пожалуйста, что кузнечики с длинами прыжков $\alpha_1, \alpha_2, \ldots a_n$ одновременно окажутся сколь угодно близко к любой точке единичной окружности, вне зависимости от того, где они начинают.

Практика.

8. Докажите, что некоторая степень тройки начинается с цифр 201720162017.

9. Докажите, что существует число Фибоначчи, начинающееся с цифр 2019

10. Докажите, что существует такое натуральное n, что числа 7^n и 8^n начинаются с цифр 20192019.

11. Дана последовательность, n-ый член которой есть первая цифра числа 2^n. Рассматриваются 13-значные числа, записанные тринадцатью идущими подряд цифрами этой последовательности. Докажите, что имеется ровно 57 различных чисел такого вида.

12. Существует ли непостоянная арифметическая прогрессия длины 2019^{2019}, все члены которой состоят из одних и тех же цифр?

13. Существуют ли два 2019-значных числа, что:
(1) одно является точным квардратом, другое — точным кубом;
(2) они отличаются порядком цифр;
(3) они оба делятся на 123456789?