Серия 17. Новогоднее домашнее задание.

1. На какую максимальную степень двойки делится число

$$1 + 3^3 + 5^5 + 7^7 + \cdots + 1021^{1021} + 1023^{1023}?$$

2. Клетки доски 8×8 раскрашены в шахматном порядке. Одним ходом разрешается перекрасить любую клетку в цвет одной из соседних с ней клеток. Можно ли с помощью таких перекрашиваний изменить цвет всех клеток на противоположный? (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

3. В компании из 2004 человек некоторые знакомы между собой. Известно, что два человека дружат, если они знакомы и у них есть общий знакомый. Назовем человека необщительным, если у него нет друзей. Назовем человека *странным*, если он имеет в этой компании 1003 знакомых, но при этом необщительный. Какое максимальное число странных людей может быть в этой компании?

4. В лагерь приехали $n \geqslant 9$ школьников. Известно, что любую группу из 6 школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, что в каждой комнате все школьники знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых могло быть среди школьников?

5. На плоскости расположено бесконечное множество L прямых, никакие две из которых не параллельны. Известно, что, как бы ни расположить на плоскости квадрат со стороной 1, он будет пересекаться хотя бы с одной прямой множества L. Докажите, что найдется квадрат со стороной $0,8$, который пересекается не менее чем с тремя прямыми множества L.

6. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB, DC пересекаются в точке P, а лучи AD, BC — в Q. Из точек P и Q внутрь углов APD и AQB проведено ещё по два луча, разбивающие четырёхугольник $ABCD$ на девять частей. Известно, что в части, примыкающие к вершинам B, C, D, можно вписать окружность. Докажите, что в часть, примыкающую к вершине A, тоже можно вписать окружность.

7. Let ABC be a triangle with $AB = AC$. Let M be the midpoint of BC. Let the circles with diameters AC and BM intersect at points M and P. Let MP intersect AB at Q. Let R be a point on AP such that $QR \parallel BP$. Prove that CP bisects $\angle RCB$.

8. Let a, b, and c be odd positive integers such that a is not a perfect square and

$$a^2 + a + 1 = 3(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1).$$

Prove that at least one of the numbers $b^2 + b + 1$ and $c^2 + c + 1$ is composite.

9. Let $a_1, a_2, \cdots, a_n$ be integers such that $1 = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2019} = 99$. Find the minimum f_0 of the expression

$$f = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2019}^2) - (a_1a_3 + a_2a_4 + \cdots + a_{2017}a_{2019}),$$

and determine the number of sequences $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ such that $f = f_0$.