Серия 14. Интуииция.

1. Есть 12 палочек, из которых можно сложить 4 треугольника. Тогда из них можно сложить 3 четырёхугольника.

2. Если в разложении числа n на простые множители каждый множитель присутствует не более, чем в первой степени, то для любого натурального m, взаимно простого с n найдётся такое натуральное a, что $a^a \equiv m \pmod{n}$.

3. Среди любых 1000 треугольников можно выбрать один, который можно накрыть объединением остальных.

4. Если $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, то и $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^3$ тоже сходится.

5. Существует квадратный трёхчлен $P(x)$ такой, что для любого натурального k, у многочлена $P(P(\ldots(P(x))))$ (где P берётся k раз) ровно 2^k различных вещественных корней.

6. Вершины любого дерева можно покрасить в несколько цветов так, чтобы
(i) любые две точки одного цвета соединял путь не длиннее 10000
(ii) ни на каком пути (даже самопересекающемся) длины 2000 не было точек трех разных цветов

7. На плоскости можно отметить конечное множество точек так, чтобы каждая была равноудалена хотя бы от 100 других.

8. Пусть A — множество из N остатков по модулю N^2. Тогда существует множество B из N остатков по модулю N^2 такое, что в $A+B$ содержится хотя бы половина остатков по модулю N^2.

9. Для любого конечного множества точек, не лежащих на одной прямой, найдётся прямая, содержащая ровно две точки.

10. Если для многогранников $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ существует биекция f такая, что любая грань $A_{i1}A_{i2}\ldots A_{is}$ равна грани $f(A_{i1})f(A_{i2})\ldots f(A_{is})$, то многогранники равны.

11. Пусть $P(x)$ — отличный от константы многочлен, имеющий только действительные корни. Тогда если z — кратный корень его производной, то z — корень $P(x)$.

12. Для любого натурального n если в таблице $n \times n$ расставлены числа от 0 до 1 так, что сумма в каждой строке и в каждом столбце равна 1, то можно выбрать такие n чисел, любые два из которых лежат в разных строках и в разных столбцах так, что наименьшее (какое-то, если их несколько) из выбранных чисел будет в первой строке.

13. Если натуральный ряд покрыт арифметическими прогрессиями (не обязательно конечным количеством), то сумма обратных величин к разностям прогрессий не менее 1.

14. Функция $f(x)$ при целых x принимает целые значения. Оказалось, что для любого простого p существует такой многочлен $Q_p(x)$ с целыми коэффицентами степени не выше 2013, что $f(n) - Q_p(n)$ делится на p при любом целом n. Обязательно ли существует такой многочлен $g(x)$ с рациональными коэффициентами, что $f(n) = g(n)$ при любом натуральном n?