Кружок 11-2 **07.05.2020**

Серия 42. Последовательности

1. Докажите, что если $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$, $n \geqslant 1$, то $0 < a_{10} - \sqrt{2} < 10^{-210}$.

2 Последовательность задана условиями $a_1 = 100$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, $n \geqslant 1$. Найдите $[a_{2020}]$.

3. Докажите, что если $u_0 = 0,001$, $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$, $n \geqslant 0$, то $u_{1000} < \frac{1}{2000}$.

4. Последовательность $\{x_n\}$ начальным условием $x_1 = 1/2$ и соотношением $x_{n+1} = 1 - x_1 x_2 \ldots x_n$. Докажите, что а) $x_{100} > 0,99$; б) $x_{100} < 0,991$.

5. Последовательность $\{x_n\}$ задана соотношением $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n(n+1)}$, причем $x_1 \in (0, 1)$. Докажите, что эта последовательность ограничена.

6 а) Докажите, что если $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}$ и $0 < x_1 < 1$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.
б) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} n(\alpha - x_n) = \alpha^2$, где $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

7 Последовательность определена как $a_1 = 0$, $(n + 1)^3 a_{n+1} = 2n^2(2n + 1)a_n + 2(3n + 1)$. Докажите, что существует бесконечно много целых членов последовательности.

8. Последовательность $\{x_k\}$ определена как $x_1 = 1$, $x_{2k} = -x_k$, $x_{2k-1} = (-1)^{k+1} x_k$ для натуральных k. Докажите, что $x_1 + \ldots + x_n \geqslant 0$ для всех натуральных n