Серия 41. Анализ.

1. Андрей и Маша играют в такую игру: вначале Андрей вырезает из отрезка [0, 1] интервал длины $\frac{1}{2}$, затем из оставшихся двух отрезков Маша вырезает интервал длины $\frac{1}{4}$, затем из оставшихся трех отрезков Андрей вырезает интервал длины $\frac{1}{8}$, и т.д. Проигрывает тот, кто не может вырезать свой очередной интервал. Кто выиграет при правильной игре?

2. Рассмотрим числовые ряды
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(a_n), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sin(2a_n)$$
   а) Может ли первый из этих рядов сходиться, а второй расходиться?

   б) Может ли второй из этих рядов сходиться, а первый расходиться?

3. Определим последовательность $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Сходится ли ряд $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$?

4. Интегрируема ли на полуоси $[0, \infty)$ функция
$$f(x) = e^{-x^2} \int\limits_0^x e^{t^2} dt?$$

5. Пусть многочлен $p(x)$ степени n имеет на отрезке [0, 1] ровно n нулей, причем $p(0) = p(1) = 0$. Найдите множество всех возможных значений максимального нуля производной многочлена p (то есть максимального из таких чисел a, что $p'(a) = 0$).

6. Пусть $f(x)$ гладкая выпуклая вниз функция на прямой с единственным минимумом в нуле, и для всякого a сумма $f(x)+f(x-a)$ достигает минимума в точке, в которой $f(x) = f(x-a)$. Верно ли, что функция f четная?

7. Пусть $f : [1\infty) \to [1, \infty)$ возрастающая функция, причем функция $\frac{f(x)}{x}$ не ограничена на $[1, \infty)$. Докажите, что найдется последовательность $a_1 < a_2 < \ldots$ положительных чисел со свойствами
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f(a_k)} < \infty,$$