Серия 30. Разнобой

1. Какое наибольшее значение может принимать выражение $1 : (a + 2010 : (b + 1 : c))$, где a, b, c — попарно различные ненулевые цифры?

2. На экране компьютера напечатано натуральное число, делящееся на 7, а курсор находится впромежутке между некоторыми двумя его соседними цифрами. Докажите, что существует такая цифра, что, если её впечатать в этот промежуток любое число раз, то все получившиеся числа также будут делиться на 7.

3. На собрание пришло n человек ($n > 1$). Оказалось, что у любых двух из них есть среди собравшихся ровно два других общих знакомых.

   а) Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом людей на этом собрании.

   б) Покажите, что n может быть больше 4.

4. Для каждого простого p найдите наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$.

5. Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной d метров. При каком наименьшем d фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?

6. Докажите, что для любых различных натуральных чисел m и n справедливо неравенство $|\sqrt[n]{m} - \sqrt[m]{n}| > \frac{1}{mn}$.

7. В каждой клетке квадратной таблицы написано по действительному числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма k наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма k наибольших чисел равна b.

   а) Докажите, что если $k = 2$, то $a = b$.

   b) В случае $k = 3$ приведите пример такой таблицы, для которой $a \neq b$.

Кружок в “Хамовниках”. 2019-2020 учебный год. 11 класс. Группа 11-2.

Серия 30. Разнобой

1. Какое наибольшее значение может принимать выражение $1 : (a + 2010 : (b + 1 : c))$, где a, b, c — попарно различные ненулевые цифры?

2. На экране компьютера напечатано натуральное число, делящееся на 7, а курсор находится впромежутке между некоторыми двумя его соседними цифрами. Докажите, что существует такая цифра, что, если её впечатать в этот промежуток любое число раз, то все получившиеся числа также будут делиться на 7.

3. На собрание пришло n человек ($n > 1$). Оказалось, что у любых двух из них есть среди собравшихся ровно два других общих знакомых.

   а) Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом людей на этом собрании.

   б) Покажите, что n может быть больше 4.

4. Для каждого простого p найдите наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$.

5. Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной d метров. При каком наименьшем d фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?

6. Докажите, что для любых различных натуральных чисел m и n справедливо неравенство $|\sqrt[n]{m} - \sqrt[m]{n}| > \frac{1}{mn}$.

7. В каждой клетке квадратной таблицы написано по действительному числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма k наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма k наибольших чисел равна b.

   а) Докажите, что если $k = 2$, то $a = b$.

   b) В случае $k = 3$ приведите пример такой таблицы, для которой $a \neq b$.