Серия 28. Комбинаторная геометрия

1. На плоской горизонтальной площадке стоят 5 прожекторов, каждый из которых испускает лазерный луч под одним из двух острых углов α или β к площадке и может вращаться лишь вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину луча. Известно, что любые 4 из этих прожекторов можно повернуть так, что все 4 испускаемых ими луча пересекутся в одной точке. Обязательно ли можно так повернуть все 5 прожекторов, чтобы все 5 лучей пересеклись в одной точке?

2. Можно ли отметить k вершин правильного 14-угольника так, что любой четырёхугольник с вершинами в отмеченных точках, имеющий две параллельные стороны, является прямоугольником, если: а) $k = 6$ б) $k > 7$?

3. (было, но разве кто-то помнит?) Единичный квадрат разрезан на n треугольников. Докажите, что одним из треугольников можно накрыть квадрат со стороной $\frac{1}{n}$

4. Можно ли так раскрасить все клетки бесконечной клетчатой плоскости в белый и чёрный цвета, чтобы каждая вертикальная прямая и каждая горизонтальная прямая пересекали конечное число белых клеток, а каждая наклонная прямая пересекала конечное число чёрных?

5. На гранях единичного куба отметили 8 точек, которые служат вершинами меньшего куба. Найдите все значения, которые может принимать длина ребра этого куба

6. Можно ли четырьмя плоскостями разрезать куб с ребром 1 на части так, чтобы для каждой из частей расстояние между любыми двумя ее точками было: а) меньше $\frac{4}{5}$; б) меньше $\frac{4}{7}$? Предполагается, что все плоскости проводятся одновременно, куб и его части не двигаются.

7. Про бесконечный набор прямоугольников известно, что в нём для любого числа S найдутся прямоугольники суммарной площади больше S.

   а) Обязательно ли этим набором можно покрыть всю плоскость, если при этом допускаются наложения?

   б) Тот же вопрос, если дополнительно известно, что все прямоугольники в наборе являются квадратами.