Серия 19. Линейность. Продолжаем разговор

Divide et impera

1. В полном графе некоторые рёбра покрашены в красный, остальные — в чёрный. Назовём весом треугольника сумму чисел в его рёбрах Докажите, что можно написать на каждом ребре числа так, чтобы для каждого чёрного ребра сумма весов треугольников, содержащих его была равна нулю, а для каждого красного аналогичная сумма была равна 1.

2. Натуральное число n не делится на 3. По кругу сидят n хамелеонов красного и синего цвета. Каждую минуту все хамелеоны, у которых соседи разного цвета, одновременно от испуга перекрашиваются в другой цвет: синие — в красный, красные — в синий. Остальные хамелеоны цвета не меняют. Докажите, что рано или поздно все хамелеоны одновременно вернут себе первоначальный цвет

3. Есть n не горящих лампочек и k выключателей. Каждый выключатель соединён с некоторыми лампочками. При нажатии выключателя, все соединённые с ним лампочки меняют своё состояние (если горели, то гаснут, если не горели, то загораются)

а) Докажите, что если $k < n$, то при любом соединени между лампочками и выключателями найдётся комбинация горящих лампочек, которую нельзя получить.

б) Докажите, что если $k > n$, то при любом соединении можно нажать на некоторые выключатели так, чтобы ни одна лампочка в итоге не загорелась.

4. Петя вписал числа в клетки квадрата 3×3 так, что получился магический квадрат. Числа в каком наименьшем количестве клеток должен узнать Вася, чтобы восстановить весь квадрат?(мы сами выбираем в каких клетках хотим узнать значения)

5. 24 студента решали 25 задач. У преподавателя есть таблица размером 24×25, в которой записано, кто какие задачи решил. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один студент. Докажите, что можно отметить некоторые из задач знаком "$+$ а некоторые из остальных – знаком "$-$"и приписать каждой задаче некоторое натуральное число баллов так, чтобы каждый студент набрал поровну баллов за задачи, отмеченные знаками "$+$"и "$-$".

6. В таблице размером $m \times n$ записаны числа так, что для каждых двух строк и каждых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно восстановить стёртые. Докажите, что осталось не меньше чем $(n + m - 1)$ чисел.