

Гармонический четырехугольник

Определение.. Вписанный четырехугольник называется гармоническим, если произведения длин его противоположных сторон равны.

1. (а) Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\frac{AM}{MC} = \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AD^2}{DC^2}$.

(б) Докажите, что каждая диагональ гармонического четырехугольника является симедианой треугольников, на которые разбивает четырехугольник другая диагональ.

Определение.. Двойным отношением упорядоченной четверки точек A, B, C, D , лежащих на одной прямой, называется величина $(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$. В случае, если $(A, B, C, D) = -1$, четверка точек A, B, C, D называется гармонической.

2. (а) Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей, P — точка пересечения касательной к его описанной окружности в точке B и прямой AC . Докажите, что точки A, C, M, P образуют гармоническую четверку точек.

(б) Докажите, что вписанный четырехугольник $ABCD$ является гармоническим тогда и только тогда, когда касательные к его описанной окружности в точках B и D пересекаются на прямой AC , либо параллельны этой прямой.

(с) Докажите, что гармонический четырехугольник однозначно задается тремя своими вершинами (порядок обхода вершин также известен) и укажите способ его построения по трем данным вершинам.

(д) Диагональ BD вписанного четырехугольника $ABCD$ является симедианой треугольника ABC . Докажите, что четырехугольник $ABCD$ гармонический.

3. Пусть N — середина диагонали AC гармонического четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $\angle BNC = \angle DNC$.

4. Пусть PT и PB — две касательные к окружности, AB — ее диаметр, и TH — перпендикуляр, опущенный из точки T на AB . Докажите, что прямая AP делит пополам отрезок TH .

5. $ABCD$ — параллелограмм, прямая ℓ проходит через B перпендикулярно BC . Две окружности с общей хордой CD касаются прямой ℓ в точках P и Q . Докажите, что отрезки DP и DQ видны из середины AB под равными углами.