Симедиана

Определение. *Симедианой* треугольника называется прямая, симметричная его медиане относительно биссектрисы угла, из которого проведена медиана.

1. Пусть BK — симедиана треугольника ABC. Докажите, что $\frac{AK}{KC} = \frac{AB^2}{BC^2}$.

2. **(Основная).** Касательные описанной окружности треугольника ABC, проведённые точках A и C, пересекаются в точке P. Докажите, что BP — симедиана треугольника ABC.

3. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Окружность, построенная на BO как на диаметре, повторно пересекает описанную окружность треугольника AOC в точке S. Докажите, что BS — симедиана треугольника ABC.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC во вне построены квадраты $ABXY$ и $BCKL$ Прямые XY и KL пересекаются в точке T. Докажите, что BT — симедиана треугольника ABC.

5. Даны окружность, её хорда AB и середина C_0 меньшей дуги AB. На большей дуге AB выбирается произвольная точка C. Касательная к окружности, проведённая из точки C, пересекает касательные, проведённые из точек A и B, в точках X и Y соответственно. Прямые C_0X и C_0Y пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C.

6. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

Определение. Три симедианы треугольника ABC пересекаются в одной точке, которая называется *точкой Лемуана* треугольника ABC.

7. **(a)** Через точку Лемуана L внутри треугольника провели три отрезка, антипараллельных его сторонам. Докажите, что проведенные отрезки равны.

   (b) Через точку L провели прямые, параллельные сторонам треугольника и отметили точки пересечения с остальными сторонами. Докажите, что отмеченные шесть точек лежат на одной окружности.

   (c) Докажите, что центр окружности из предыдущего пункта является серединой отрезка OL, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.