Неравенство Йенсена

Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз*, если любая хорда её графика лежит выше самого графика. Другими словами это можно записать неравенством $\lambda f(x) + \mu f(y) \geqslant f(\lambda x + \mu y)$ при всех $x, y \in (a, b)$, $\lambda, \mu \in [0, 1]$, $\lambda + \mu = 1$.

Неравенство Йенсена. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — неотрицательные вещественные числа, причём $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$. Тогда для любой выпуклой вниз функции $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ и для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ имеет место неравенство:

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \geqslant f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n).$$

0. **Неравенство Коши.** Для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполнено неравенство

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

1. Для $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из отрезка $[0; \frac{\pi}{2}]$ докажите неравенство:

$$\frac{\cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n}{n} \leqslant \cos\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

2. **Неравенство Коши-Буняковского.** Для положительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполнено неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2$$

3. Докажите неравенство для положительных чисел:

$$\sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

4. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — стороны некоторого выпуклого многоугольника, а P — его периметр. Докажите, что

$$\frac{a_1}{P - 2a_1} + \frac{a_2}{P - 2a_2} + \ldots + \frac{a_n}{P - 2a_n} \geqslant \frac{n}{n-2}$$

5. Для положительных a_i, b_i докажите неравенство

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt[n]{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n} \leqslant \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \cdot \ldots \cdot (a_n + b_n)}$$