

Полюсы и поляры

Определение. Полярной точки A относительно окружности ω с центром O и радиусом R , называется прямая a такая, что X таких, что $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX}) = R^2$. Точка A называется полюсом a .

Полярное соответствие задаёт взаимно однозначное отображение между точками плоскости, исключая O и прямыми, не проходящими через O .

- 1. Полярная двойственность.** Докажите, что если точка A лежит на поляре точки B , то B лежит на поляре A .
- Докажите, что три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их поляры пересекаются в одной точке или параллельны.
- 3. Равносильные определения поляры.** На плоскости есть окружность ω с центром O и точка A .
 - (а) Пусть A' — инверсный образ точки A относительно ω (т.е. такая точка на луче OA что $OA \cdot OA' = R^2$). Докажите, что поляра A проходит через A' и перпендикулярна OA .
 - (б) Пусть A — вне ω , а AP и AQ — отрезки касательных к ω . Докажите, что PQ — поляра A .
 - (в) Через A проведена секущая, пересекающая ω в X и Y . Докажите, что касательные к ω , восстановленные в X и в Y , пересекаются на поляре точки A или параллельны.
 - (г) Через A проведена ещё одна секущая, пересекающая ω в U и V . Докажите, что пары прямых XU и YV , а также XV и YU пересекаются на поляре точки A или параллельны.
- Вписанная окружность с центром I касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 . Прямые B_1C_1 и BC пересекаются в точке A_2 . Докажите, что $IA_2 \perp AA_1$.
- В условиях предыдущей задачи докажите, что перпендикуляр из I на AA_2 проходит через точку пересечения прямых AA_1 и B_1C_1 .
- (а) (Теорема Брианшона) Докажите, что главные диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке.
(б) (Теорема Брианшона для четырёхугольника) Докажите, что точка пересечения диагоналей описанного четырёхугольника совпадает с точкой пересечения отрезков, соединяющих точки касания окружности с противоположными сторонами.
- Во вписанном четырёхугольнике отметили точки пересечения пар противоположных сторон и диагоналей. Докажите, что ортоцентр треугольника с вершинами в отмеченных точках совпадает с центром описанной окружности четырёхугольника.