

## Полюсы и поляры

**Определение.** Полярной точки  $A$  относительно окружности  $\omega$  с центром  $O$  и радиусом  $R$ , называется прямая  $a$  такая, что  $X$  таких, что  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX}) = R^2$ . Точка  $A$  называется полюсом  $a$ .

Полярное соответствие задаёт взаимно однозначное отображение между точками плоскости, исключая  $O$  и прямыми, не проходящими через  $O$ .

- 1. Полярная двойственность.** Докажите, что если точка  $A$  лежит на поляре точки  $B$ , то  $B$  лежит на поляре  $A$ .
- Докажите, что три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их поляры пересекаются в одной точке или параллельны.
- 3. Равносильные определения поляры.** На плоскости есть окружность  $\omega$  с центром  $O$  и точка  $A$ .
  - (а) Пусть  $A'$  — инверсный образ точки  $A$  относительно  $\omega$  (т.е. такая точка на луче  $OA$  что  $OA \cdot OA' = R^2$ ). Докажите, что поляра  $A$  проходит через  $A'$  и перпендикулярна  $OA$ .
  - (б) Пусть  $A$  — вне  $\omega$ , а  $AP$  и  $AQ$  — отрезки касательных к  $\omega$ . Докажите, что  $PQ$  — поляра  $A$ .
  - (в) Через  $A$  проведена секущая, пересекающая  $\omega$  в  $X$  и  $Y$ . Докажите, что касательные к  $\omega$ , восстановленные в  $X$  и в  $Y$ , пересекаются на поляре точки  $A$  или параллельны.
  - (г) Через  $A$  проведена ещё одна секущая, пересекающая  $\omega$  в  $U$  и  $V$ . Докажите, что пары прямых  $XU$  и  $YV$ , а также  $XV$  и  $YU$  пересекаются на поляре точки  $A$  или параллельны.
- Вписанная окружность с центром  $I$  касается сторон  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $A_1, B_1, C_1$ . Прямые  $B_1C_1$  и  $BC$  пересекаются в точке  $A_2$ . Докажите, что  $IA_2 \perp AA_1$ .
- В условиях предыдущей задачи докажите, что перпендикуляр из  $I$  на  $AA_2$  проходит через точку пересечения прямых  $AA_1$  и  $B_1C_1$ .
- (а) (Теорема Брианшона) Докажите, что главные диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке.  
(б) (Теорема Брианшона для четырёхугольника) Докажите, что точка пересечения диагоналей описанного четырёхугольника совпадает с точкой пересечения отрезков, соединяющих точки касания окружности с противоположными сторонами.
- Во вписанном четырёхугольнике отметили точки пересечения пар противоположных сторон и диагоналей. Докажите, что ортоцентр треугольника с вершинами в отмеченных точках совпадает с центром описанной окружности четырёхугольника.