Запусти процесс

Задачи для разбора

1. На олимпиаде у каждого участника не более 25 знакомых. Докажите, что можно рассадить всех участников по трём аудиториям так, чтобы у каждого в его аудитории было не более 8 знакомых.
Разбор задачи `https://youtu.be/54ilyvNREVY`

2. На плоскости заданы $2n$ точек, причём никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что эти точки являются концами n непересекающихся отрезков.
Разбор задачи `https://youtu.be/isWAX2XRwZI`

Задачи для самостоятельного решения

1. Есть 20 камней неизвестного веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что сделав не более 19 взвешиваний, можно все камни можно разложить на две кучки так, чтобы веса кучек отличались не более чем на вес самого тяжелого камня.

2. Ученики школы посещают кружки. Докажите, что можно несколько школьников принять в пионеры так, чтобы в каждом кружке был хотя бы один пионер и для любого пионера нашелся кружок, в котором он был бы единственным пионером.

3. На плоскости даны n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и n прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что из этих точек можно опустить попарно непересекающиеся перпендикуляры на эти прямые так, чтобы на каждую прямую был опущен ровно один перпендикуляр.

4. На координатной плоскости лежит правильный пятиугольник. Его вершины имеют координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5).
(a) Докажите, что если все вершины имеют целые координаты, то все суммы $x_i + y_i$ имеют одинаковую чётность.
(b) Докажите, что если все вершины имеют целые координаты, то все суммы $x_i + x_{i+1}$ — чётные.
(c) Докажите, что у любого правильного $(2n+1)$-угольника хотя бы у одной из вершин есть нецелая координата.

5. На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на три дуги так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)

6. **(a) (Теорема Дирака)** Γ — граф, состоящий из $n \geqslant 3$ вершин. Известно, что степень каждой вершины хотя бы $n/2$. Докажите, что в графе существует простой цикл длины n.

(b) (Теорема Оре) Γ — граф, состоящий из $n \geqslant 3$ вершин. Про любые две несмежные вершины v и u известно, что $\deg v + \deg u \geqslant n$. Докажите, что в графе существует простой цикл длины n.

7. У Карлсона есть 100 банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой не больше, чем третья часть всего варенья. На завтрак Карлсон может съесть поровну варенья из любых трёх банок. Докажите, что Карлсон может действовать так, чтобы за некоторое количество завтраков съесть все варенье.