

# Интерполяция

## Интерполяционная формула Лагранжа

Для  $n + 1$  пар чисел  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , где все  $x_i$  различны, существует единственный многочлен  $P(x)$  степени не более  $n$ , для которого  $P(x_i) = y_i$ , причем его вычислить по формуле

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \dots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \dots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}.$$

1. Про многочлен  $f(x) = x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_0$  известно, что  $f(1) = f(10), f(2) = f(9), \dots, f(5) = f(6)$ . Докажите, что график функции  $f(x)$  имеет ось симметрии.
2. Петя записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Петя повторил эту процедуру  $k$  раз, и все  $k$  раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение  $k$ .
3. Известно, что некоторый многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения. Докажите, что все его коэффициенты рациональны.
4. Даны два многочлена положительной степени  $P(x)$  и  $Q(x)$ , причём при всех  $x$  выполнены равенства  $P(P(x)) = Q(Q(x))$  и  $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$ . Обязательно ли тогда при всех  $x$  выполнено равенство  $P(x) = Q(x)$ ?
5. Пусть  $P(x)$  ненулевой многочлен, который удовлетворяет условию  $(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$  для любого  $x$ , и  $(P(2))^2 = P(3)$ . Найти  $P(x)$ .
6. Пусть  $P(x)$  — многочлен степени не выше  $n$ , для которого  $P(i) = 2^i$  при  $i = 0, 1, \dots, n$ . Найдите  $P(n+1)$ .
7. Дана последовательность Фибоначчи  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ . Многочлен  $P(x)$  степени 1009 таков, что  $P(k) = F_k$  при  $k \in \{1011, \dots, 2020\}$ . Докажите, что  $P(2021) = F_{2021} - 1$ .