Перестановки

1. На полковом плацу нарисован прямоугольник 1×7, разбитый на 7 квадратов. В квадратах написаны числа от 1 до 7, но не обязательно по порядку. Старшина выстроил семерых солдат в шеренгу так, что каждый стоит в своем квадрате. По команде «Переставься!» каждый солдат переходит из своего квадрата в k-ый слева, где k — число, написанное в квадрате, где стоит солдат. Докажите, что не больше, чем через 12 команд начальное расположение солдат повторится.

Определение 1. *Перестановкой* конечного множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется биективное отображение σ этого множества на себя.

Утверждение. Любая перестановка разбивается на непересекающиеся циклы.

Определение 2. *Инверсией* назовем такую пару индексов i, j, что $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$. Перестановка называется четной (соответственно нечетной), если число инверсий в ней четно (соответственного нечетно).

Определение 3. *Транспозицией* называется перестановка, меняющая два элемента местами. Транспозиции, меняющие местами два соседних элемента, называются элементарными.

2. Докажите, что любую перестановку можно получить последовательным выполнением
(a) транспозиций;
(b) элементарных транспозиций.

3. **(a)** Докажите, что при любой транспозиции четность перестановки меняется.
(b) Найдите число четных перестановок множества из n-элементов.

4. **(a)** Докажите, что при композиции двух перестановок их четности складываются.
(b) Чему равна четность цикла длины n?

5. Придумайте две перестановки, такие, что их композициями можно получить любую перестановку.

6. В городе N разрешены только тройные обмены квартир (по циклу). Однажды выяснилось, что горожане Дилер и Брокер хотят поменяться своими квартирами, а все остальные жители при этом не хотят никуда переезжать. Докажите, что этот план невыполним.

7. В ресторане есть n юношей, n девушек и n столов. За каждым столом сидят один юноша и одна девушка. На каждом столе написано, за какой номер стола должен пересесть сидящий за ним юноша и за какой стол сидящая за ним девушка. Каждые десять минут все посетители ресторана пересаживаются в соответствии с номерами, указанными на их столах. При каких n можно так написать числа на столах, что в итоге каждый юноша посидит с каждой девушкой и каждый из пришедших посидит за каждым столом?

8. В библиотеке n журналов размещены на k полках. На каждой полке первый журнал был переставлен за последний журнал этой же полки. Библиотекарь за одну операцию меняет местами два произвольных журнала (возможно на разных полках). Докажите, что наименьшее число операций, которое потребуется библиотекарю, для расстановки в исходном порядке равно $n - k$.

9. Игра в пятнашки — популярная головоломка, придуманная в 1878 году Ноем Чепмэном. Представляет собой набор одинаковых квадратных костяшек с нанесёнными числами, заключённых в квадратную коробку. Длина стороны коробки в четыре раза больше длины стороны костяшек для набора из 15 элементов, соответственно в коробке остаётся незаполненным одно квадратное поле. Можно перемещать костяшки по коробке. Можно ли из положения на левом рисунке получить положение на правом рисунке?