

## Экстремальная геометрия

1. Через произвольную точку плоскости, не лежащую на окружности проведите такую прямую, что сумма отрезков секущих была (а) максимальна, (б) минимальна.
2. Для четырех различных точек  $A, B, C$  и  $D$  на плоскости найдите такую точку  $X$ , что сумма  $AH + BH + CH + DH$  минимальна.
3. На отрезке  $AB$  выбрана произвольная точка  $P$ . На отрезках  $AP$  и  $PB$  в одну сторону построены правильные треугольники  $AXP$  и  $BYP$ . При каких точках  $P$  отрезок  $XY$  минимален?
4. Внутри острого угла  $BAC$  дана точка  $P$ . Постройте на сторонах  $BA$  и  $AC$  точки  $X$  и  $Y$  так, чтобы периметр треугольника  $XPY$  был минимальным.
5. На дуге  $AB$  окружности найдите точку  $C$  такую, что сумма  $AC + BC$  максимальна.
6. Дан треугольник  $ABC$ . Найдите на прямой  $AB$  точку  $X$ , для которой сумма радиусов описанных окружностей треугольников  $ACX$  и  $BCX$  была бы наименьшей.
7. Внутри угла  $A$  взята точка  $X$ . Найдите точки  $B$  и  $C$  на сторонах угла такие, что  $AB = AC$  и сумма  $BX + CX$  минимальна.
8. Из точки  $X$  описанной окружности треугольника  $ABC$  опущены перпендикуляры  $MP$  и  $MQ$  на прямые  $AB$  и  $AC$ . При каком положении точки  $X$  длина отрезка  $PQ$  максимальна?
9. Дана прямая  $\ell$  и точки  $A, B$  лежащие по одну сторону от этой прямой. Постройте на прямой  $\ell$  такую точку  $X$ , что  $AH^2 + BH^2$  минимальна.
10. Точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  взяты на сторонах  $BC, CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ , причём отрезки  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке  $X$ . При каком положении точки  $M$  величина  $\frac{XA_1}{AA_1} \cdot \frac{XB_1}{BB_1} \cdot \frac{XC_1}{CC_1}$  максимальна?