

Разной по графам

1. Докажите, что в полном ориентированном графе на $n \geq 10$ вершинах всегда найдётся вершина, инвертированием всех рёбер в которой можно добиться того, чтобы граф стал сильно связным.
2. В стране 105 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из каждого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?
3. Докажите, что на рёбрах любого графа можно расставить стрелки так, чтобы для каждой вершины модуль разности входящей и исходящей её степени не превосходил 1.
4. В компании из $2n + 1$ человека для любых n человек найдётся отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.
5. На всех дорогах города двустороннее движение. И вот уже два года подряд ремонтируют все дороги. В первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. Во второй год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в каждый момент ремонта можно было проехать из любой точки города в любую другую. Докажите, что в городе можно ввести одностороннее движение так, что из каждой точки города удастся проехать в любую другую точку.
6. В кружке 49 учеников. Известно, что если трое кружковцев попарно незнакомы друг с другом, то какие-то двое из них имеют в кружке общего знакомого. Докажите, что кто-то из учеников имеет в кружке хотя бы 6 знакомых.