Процессы

1. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некоторое количество пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов). Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах — k-ой и $(k+1)$-ой, приходят к выводу, что они мешают друг другу и переселяются соответственно в $(k-1)$-ю и $(k+2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.

2. В парламенте у каждого его члена не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага.

3. На плоскости расположено такое конечное множество точек M, что никакие три точки не лежат на одной прямой. Некоторые точки соединены друг с другом отрезками так, что из каждой точки выходит не более одного отрезка. Разрешается заменить пару пересекающихся отрезков AB и CD парой противоположных сторон AC и BD четырёхугольника $ACBD$. В полученной системе отрезков разрешается снова произвести подобную замену, и т.д. Может ли последовательность таких замен быть бесконечной? Докажите, что любые $2n$ точек на плоскости являются концами непересекающихся отрезков.

4. На доске написано 100 натуральных чисел, среди которых ровно 33 нечётных. Каждую минуту на доску дописывается сумма всех попарных произведений всех чисел, уже находящихся на ней (например, если на доске были записаны числа 1, 2, 3, 3, то следующим ходом было дописано число $1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3$). Можно ли утверждать, что рано или поздно на доске появится число, делящееся на $2^{10000000}$?

5. При дворе короля Артура собрались $2N$ рыцарей, причём каждый из них имеет среди присутствующих не более $N-1$ врага. Доказать, что Мерлин, советник Артура, может так рассадить рыцарей за Круглым Столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

6. На доске написаны числа 2, 3, 5, …, 2003, 2011, 2017, т. е. все простые числа, не превосходящие 2020. За одну операцию можно заменить два числа a, b на максимальное простое число, не превосходящее $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$. После нескольких операций на доске осталось одно число. Какое максимальное значение оно может принимать?

7. На доске написано натуральное число. Если на доске написано число x, то можно дописать на неё число $2x+1$ или $x/(x+2)$. В какой-то момент выяснилось, что на доске присутствует число 2008. Докажите, что оно там было с самого начала.