

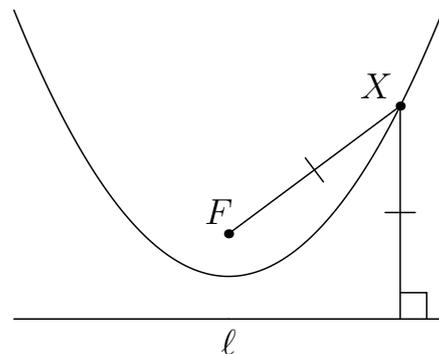
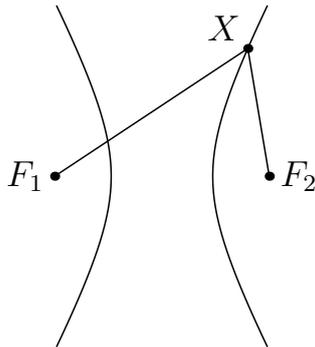
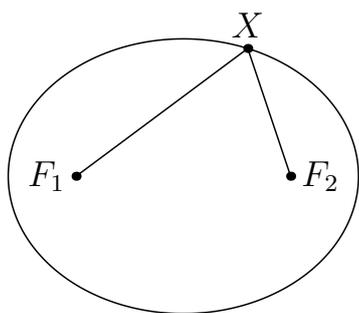
Коника

Эллипсом с фокусами в точках F_1 и F_2 называется locus точек X плоскости, для которых $F_1X + F_2X = const.$

Гиперболой с фокусами в точках F_1 и F_2 называется locus точек X плоскости, для которых $|F_1X - F_2X| = const.$

Параболой с фокусом в точке F и с директрисой ℓ называется locus точек X плоскости, для которых длина отрезка FX равна расстоянию от точки X до прямой ℓ .

Коника — любая кривая из трёх, перечисленных выше.



1. Докажите, что для любой точки внутри эллипса сумма расстояний от нее до фокусов меньше той константы из определения. А что происходит в случае гиперболы и параболы?
2. (Оптическое свойство) Докажите, что касательная к точке A эллипса с фокусами F_1 и F_2 служит биссектрисой внешнего угла F_1AF_2 .
3. Сформулируйте и докажите оптическое свойство (а) гиперболы; (б) параболы.
4. Пусть хорда PQ проходит через фокус F_1 эллипса, R — точка пересечения касательных к эллипсу в точках P и Q . Докажите, что R — это центр вневписанной окружности треугольника F_2PQ , а F_1 — это точка касания этой окружности со стороной PQ .
5. (Изогональное свойство). Из точки P вне эллипса проведены касательные PX и PY . Тогда:
(а) $\angle F_1PX = \angle F_2PY$.
(б) F_1P является биссектрисой угла XF_1Y .
6. Внутри треугольника ABC взяли две точки F_1 и F_2 . Докажите, что можно найти эллипс с фокусами в точках F_1 и F_2 , касающийся сторон треугольника, тогда и только тогда, когда F_1 и F_2 изогонально сопряжены относительно этого треугольника.
7. Треугольник ABC описан вокруг параболы. (а) Докажите, что фокус параболы лежит на окружности (ABC) .
(б) Докажите, что ортоцентр треугольника ABC лежит на директрисе параболы.
8. Найдите locus точек, из которых эллипс виден под прямым углом.
9. Докажите, что угол между касательными к параболе, проведёнными из точки на директрисе этой параболы, равен 90° .
10. Две точки A и B плоскости движутся с постоянными скоростями по двум пересекающимся прямым, причём в точку пересечения траекторий точки приезжают одновременно. Докажите, что прямая AB касается фиксированной параболы.
11. На эллипсе с фокусами F_1 и F_2 отмечена точка A . Через точку F_1 проведена хорда AB , через точку F_2 — хорда AC . Касательные к эллипсу в точках B и C пересекаются в точке P . Докажите, что окружность (AF_1F_2) проходит через середину отрезка AP .