Комплексная геометрия. Начало.

1. **(a)** Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{a-b}{a-c} \in \mathbb{R}$.

(b) Напишите уравнение прямой, проходящей через точки A и B.

(c) Докажите, что если A и B лежат на единичной окружности $z\overline{z} = 1$, то прямая AB задаётся уравнением $z + ab\overline{z} = a + b$.

2. **(a)** Докажите, что касательная к единичной окружности $z\overline{z} = 1$ точке A, лежащей на ней, задётся уравнением $z + a^2\overline{z} = 2a$.

(b) Докажите, что касательные к окружности $z\overline{z} = 1$ в точках A и B, лежащих на ней, пересекаются в точке $\frac{2ab}{a+b}$.

3. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной прямой или окружности тогда и только тогда, когда $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R}$.

4. Точки A и B лежат на единичной окружности $z\overline{z} = 1$. Точка K — основание перпендикуляра из точки Z на прямую AB. Докажите, что $k = \frac{a+b+z-ab\overline{z}}{2}$.

---

5. **Прямая Ньютона.** Докажите, что центр вписанной в четырёхугольник окружности лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей этого четырёхугольника.

6. Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

(a) Прямая Симсона. Докажите, что основания перпендикуляров из точки P на прямые, содержащие стороны треугольника, лежат на одной прямой.

(b) Докажите, что точки, симметричные P относительно прямых, содержащих стороны треугольника, лежат на одной прямой вместе с ортоцентром треугольника ABC.

7. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Прямая AO вторично пересекает ω в точке A_1. Касательная к ω, восстановленная в точке A_1, пересекает BC в точке X. Прямая XO пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. Докажите, что O — середина PQ.

8. На сторонах треугольника ABC вовне построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры являются вершинами равностороннего треугольника.

9. На окружности ω отмечены две точки A и B. Касательные к ω к точкам A и B пересекаются в точке S. Хорда XY окружности ω проходит через середину M отрезка AB. Докажите, что $\angle XSM = \angle MSY$.