Порядок элемента Z_n. Обратимые элементы Z_n.

Старые задачи

1. Пусть p – простое число, d – один из делителей числа $p-1$. Выберем из остатков $1, 2, \ldots, p-1$ те, чей показатель по модулю p равен d. Чему равен остаток произведения выбранных чисел по модулю p?

2. Найдите все натуральные n, что $3^n - 2^n \vdots n$.

Новые задачи

1. **(a)** **(Теорема Вильсона)** Пусть p — некоторое простое число. Докажите, что $(p-1)! \underset{p}{\equiv} -1$.

(b) **(Обратная теорема Вильсона)** Докажите, что если $(n-1)! \underset{n}{\equiv} -1$, то число n — простое.

2. Даны натуральные числа a, b и c такие, что $ab + 9b + 81$ и $bc + 9c + 81$ делятся на 101. Докажите, что тогда и $ca + 9a + 81$ тоже делится на 101.

3. **(a)** Преобразуем сумму $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{100}$ в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на 101.

(b) Преобразуем сумму

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2}$$

в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p.

(c) Преобразуем сумму

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p^2.

(d) **(Теорема Вольстенхольма)** Докажите, что для любого простого числа $p > 3$ выполняется сравнение

$$C_{2p}^{p} \equiv 2 \pmod{p^3}.$$

4. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — все остатки при деление на n, такие, что у каждого из них есть обратный остаток.

(a) Докажите, что $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \underset{n}{\equiv} \pm 1$;

(b) **(Обобщение Гаусса теоремы Вильсона)** Докажите, что

$$a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \equiv \begin{cases} -1 \pmod{n}, & n = 4,\ p^\alpha,\ 2p^\alpha\,; \\ \ \ 1 \pmod{n}, & n \neq 4,\ p^\alpha,\ 2p^\alpha\,. \end{cases}$$