

Геометрические задачи

1. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки X и Z соответственно. Отрезки CX и BZ пересекаются в точке Y . Оказалось, что пятиугольник $AXYZD$ — вписанный. Докажите, что $AU = DU$.
2. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Описанная окружность треугольника AOC вторично пересекает стороны AB и BC в точках E и F . Оказалось, что прямая EF делит площадь треугольника ABC пополам. Найдите угол B .
3. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC , AH — его высота. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CO . Докажите, что прямая HP проходит через середину отрезка AB .
4. Прямые PC и PD касаются окружности с диаметром AB (C и D — точки касания). Докажите, что пересечение AC и BD , пересечение AD и BC и точка P лежат на одной прямой, перпендикулярной AB .
5. Внеписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_1 . Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что прямая A_1I делит пополам высоту, проведённую из вершины A .
6. Дан остроугольный треугольник ABC . На продолжениях BB_1 и CC_1 его высот за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q так, что угол PAQ — прямой. Пусть AF — высота треугольника APQ . Докажите, что угол BFC — прямой.
7. На каждой стороне треугольника ABC построено по квадрату во внешнюю сторону. Оказалось, что внешние вершины всех квадратов лежат на одной окружности. Доказать, что треугольник ABC — равнобедренный.
8. В четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла DAB и $\angle ADC = \angle ACB$. Пусть X и Y — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на отрезки BC и CD соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника AXY лежит на BD .
9. Периметр треугольника ABC равен 4. На лучах AB и AC отмечены точки X и Y так, что $AX = AY = 1$. Отрезки BC и XY пересекаются в точке M . Докажите, что периметр одного из треугольников ABM и ACM равен 2.