

Рекуррентное

Лягушка Фибоначчи

- (а) Лягушка Фибоначчи стоит на первой клетке доски и умеет прыгать на одну или на две клетки вперёд. Доска содержит $n + 2$ клетки. На k -й клетке сидит огромный кузнечик. На клетке перед кузнечиком останавливаться нельзя, иначе лягушка спугнёт кузнечика и не сможет его съесть. Съев кузнечика, лягушка становится тяжёлой и может прыгать только на соседнюю клетку. Сколькими способами лягушка сможет допрыгать до последней клетки, съев по пути кузнечика?

(б) Лягушка Фибоначчи стоит на первой клетке доски, содержащей $n + m$ клеток. На $(n - 1)$ -й клетке находится вкусная не пугливая муха, на n -й — не пугливый комар. Сколькими способами лягушка сможет добраться до последней клетки доски, сожрав по пути только муху, но не комара? Съев комара (муху при этом можно есть или не есть)?
- Докажите комбинаторными рассуждениями (используя первую задачу) тождества
 - $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$;
 - $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.

Формулы

- Найдите значение выражения $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}$.
- Докажите, что F_{2n} делится на F_n .
- Докажите, что F_{kn} делится на F_n .
- Докажите, что $(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$.
- Докажите, что F_n делится на F_m тогда и только тогда, когда n делится на m (или когда $m = 2$).
- Вычислите $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{F_N}{F_{N-1} \cdot F_{N+1}}$.
- Можно ли натуральный ряд разбить на последовательности, каждая из которых удовлетворяет рекуррентному соотношению чисел Фибоначчи?