

Алгебра или геометрия?

1. Если $0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$, то верно

$$x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + x_3(1 - x_4) + x_4(1 - x_1) \leq 2.$$

2. Докажите, что если $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 > 0$ и $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = k$, то верно $a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 < k^2$.

3. Докажите, что если $a, b, c > 0$, то верно неравенство

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

4. Найдите минимум выражения $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 4} + \sqrt{z^2 + 9} + \sqrt{t^2 + 16}$ при условии $x + y + z + t = 10$ и x, y, z, t — положительны.

5. $|x_1|, |x_2| \leq 1$. Докажите, что $\sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2} \leq 2\sqrt{1 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}$.

6. Пусть $x, y, z > 0$ и выполняется система

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25 \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + zx + x^2 = 16 \end{cases}$$

Найдите $xy + 2yz + 3xz$.

7. Положительные числа a, b и c таковы, что выполнены равенства

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1 \\ b^2 + bc + c^2 = 3 \\ c^2 + ca + a^2 = 4 \end{cases}$$

Найдите $a + b + c$.