Показатели

Теоретические задачи

1. Пусть a, n — взаимно простые числа. Рассмотрим последовательность остатков по модулю n следующих чисел: $1, a, a^2, a^3 \dots$. Докажите, что эта последовательность периодическая и не содержит предпериода.

   Определение. Минимальный период последовательности остатков из предыдущей задачи называется *показателем a по модулю n*. Далее будем обозначать его буквой d.

2. Зафиксируем взаимно простые числа a и n.
   (a) Докажите, что d – показатель a по модулю n тогда и только тогда, когда d – наименьшее такое натуральное число, что $(a^d - 1)$ делится на n.
   (b) Пусть d – показатель a по модулю n. Пусть $a^l \equiv 1 \pmod n$. Докажите, что $d \mid l$.
   (c) Докажите, что $a^s \equiv a^r \pmod n$ тогда и только тогда, когда $s \equiv r \pmod d$.
   (d) Докажите, что показатель любого числа по модулю n (взаимно простого с n, конечно) делит $\phi(n)$ (функция Эйлера).

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть p – простое число, d – один из делителей числа $p-1$. Выберем из остатков $1, 2, \dots, p-1$ те, чей показатель по модулю p равен d. Чему равен остаток произведения выбранных чисел по модулю p?

2. Докажите, что $2^{n!} - 1 \mathrel{\vdots} n^2 - 1$ для всех чётных n.

3. Пусть $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$, где p — простое число. Натуральное число m таково, что $p | m$. Докажите, что любой простой делитель $f(m)$ взаимно прост с $m(m-1)$.

4. Найдите все тройки простых чисел p, q, r таких, что $q^r + 1 \mathrel{\vdots} p$, $r^p + 1 \mathrel{\vdots} q$, $p^q + 1 \mathrel{\vdots} r$.

5. Найдите все натуральные n, что $3^n - 2^n \mathrel{\vdots} n$.

6. Найдите все простые p и q для которых $5^p + 5^q$ делится на pq.

7. Известно, что $2^n + 1 \mathrel{\vdots} n^2$ (n — натуральное число большее 1).
(a) Докажите, что n делится на 3;
(b) Докажите, что n не делится на 9;
(c) Найдите все такие n.