

## Поворотная гомотетия

Поворотной гомотетией называется композиция гомотетия и поворота с совпадающими центрами.

1. На плоскости даны две пары точек  $A, B$  и  $A', B'$ . Докажите, что существует поворотная гомотетия, переводящая  $A$  в  $A'$ , а  $B$  в  $B'$ , причем ее центр совпадает является второй точкой пересечения окружностей  $(ABX)$  и  $(A'B'X)$ , где точка  $X$  – пересечение прямых  $AA'$  и  $BB'$ .
2. Поворотная гомотетия с центром в точке  $S$  переводит точки  $A, B$  в точки  $A', B'$  соответственно. Докажите, что существует поворотная гомотетия с центром в  $S$ , переводящая точки  $A, A'$  в точки  $B, B'$  соответственно.
3. (*Точка Микеля*) Даны четыре прямые общего положения, они образуют четыре треугольника. Непосредственно из двух предыдущих задач выведите, что описанные окружности этих треугольников пересекаются в одной точке.
4. Боковые стороны  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  повернули относительно их середин на  $90^\circ$  против часовой стрелки, получились отрезки  $A'B'$  и  $C'D'$ . Докажите, что  $B'C' = A'D'$ .
5. Стороны  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Точка  $M$  – середина  $AB$ ,  $N$  – середина  $CD$ . Докажите, что центры окружностей  $(BCE)$ ,  $(ADE)$  и  $(MNE)$  лежат на одной прямой.
6. На сторонах  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $A', B', C'$  соответственно. Докажите, что треугольник с вершинами в центрах описанных окружностей треугольников  $AB'C', BC'A', CA'B'$  подобен треугольнику  $ABC$ .
7. Точки  $A_2, B_2$  и  $C_2$  – середины высот  $AA_1, BB_1, CC_1$  остроугольного треугольника  $ABC$ . Найдите сумму углов  $C_2A_1B_2, A_2B_1C_2, B_2C_1A_2$ .
8. Вписанная в неравносторонний треугольник  $ABC$  окружность касается его сторон  $BC, CA, AB$  в точках  $A_1, B_1, C_1$ . На прямой  $AB$  отмечена такая точка  $X$ , что  $A_1X \perp B_1C_1$ . Окружности  $(ABC)$  и  $(AB_1C_1)$  пересекаются второй раз в точке  $Z$ . Докажите, что  $\angle XZC_1 = 90^\circ$ .