Формула включений и исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots$$
$$\dots - |A_{n-1} \cap A_n| + \dots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

1. Куб с ребром длины 20 разбит на 8 000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трёх направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1\times20\times20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоев.

2. Уходя на работу, мама поручила Мише, Пете и Васе: подмести пол в прихожей; помыть посуду; купить хлеба; заплатить за электричество; вынести мусор; пропылесосить ковёр в гостиной. Сколькими различными способами они могут распределить задания так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят и при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?

3. Леонид, Владимир и Вера решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?

4. В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на свое место?

5. Для натуральных a, b и c докажите равенство

$$[a,b,c] = \frac{a\cdot b\cdot c\cdot(a,b,c)}{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(a,c)}.$$

6. Сколькими способами можно расселить 15 гостей в четырех комнатах, если требуется, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

7. Докажите, что количество чисел взамно простых с $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ и не больших n равно $n\cdot\prod\limits_{i=1}^{k}\left(1-\dfrac{1}{p_i}\right)$

8. Обозначим $T(n) = 1+2+\ldots+n$. Пусть a, b, c — такие натуральные числа, что каждое из них не превосходит n, а их сумма не меньше $2n$. Не используя явную формулу для $T(n)$, доказать, что

$$T(n) = T(a)+T(b)+T(c)-T(a+b-n)-T(b+c-n)-T(a+c-n)+T(a+b+c-2n).$$

9. Из множества натуральных чисел от 1 до 2020 случайно выбирается 20 подмножеств (с возвращением). Найдите вероятность того, что множества не имеют общего элемента.