Алгебраический разнобой

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена f_i(x) выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

2. Два приведенных квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что каждый из них имеет по два корня, и выполняются равенства $f(1) = g(2)$ и $g(1) = f(2)$. Найдите сумму всех четырех корней этих трехчленов.

3. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

4. Известно, что каждый из трехчленов x^2+ax+b и $x^2+ax+b+1$ имеет хотя бы по одному корню, и все корни этих трехчленов целые. Докажите, что трехчлен $x^2 + ax + b + 2$ корней не имеет.

5. Положительные числа x, y таковы, что $x^5 - y^3 \geqslant 2x$. Докажите, что $x^3 \geqslant 2y$.

6. Можно ли выбрать 100 последовательных чётных чисел и разбить их на пары $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_{50}, b_{50})$ так, чтобы каждое из уравнений

$$x^2 + a_1x + b_1 = 0, x^2 + a_2x + b_2 = 0, \ldots, x^2 + a_{50}x + b_{50} = 0$$

имело целые корни?

7. По кругу расставлены 100 различных натуральных чисел. Вася разделил каждое из них с остатком на следующее по часовой стрелке; при этом оказалось, что остатки, полученные Васей, принимают всего два различных значения. Петя разделил каждое из чисел с остатком на следующее против часовой стрелки. Докажите, что все остатки, полученные Петей, различны.

8. Бесконечная последовательность ненулевых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такова, что при всех натуральных $n \geqslant 2019$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена $P_n(x) = x^{2n} + a_1x^{2n-2} + a_2x^{2n-4} + \ldots + a_n$. Докажите, что существует такое N, что в бесконечной последовательности $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ каждый член меньше предыдущего.