

Комбинаторный разбой

1. В олимпиаде принимало участие семеро школьников, каждый из которых получил от 0 до 11 баллов. Докажите, что можно выбрать два непересекающихся множества школьников, в которых поровну ребят, и в которых суммы набранных баллов равны.
2. Изначально по кругу расставлены 40 синих, 30 красных и 20 зеленых фишек, причем фишки каждого цвета идут подряд. За ход можно поменять местами стоящие рядом синюю и красную фишки, или стоящие рядом синюю и зеленую фишки. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы любые две стоящие рядом фишки были разных цветов?
3. В компании 100 человек. Оказалось, что любых 98 из них можно разбить на 49 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?
4. На окружности отмечено 150 серых, 151 бурая и 152 малиновых точки таким образом, что никакие две одноцветные точки не стоят рядом. Докажите, что найдётся бурая точка, у которой оба соседа — малиновые.
5. В стране между некоторыми парами городов осуществляются двусторонние беспосадочные авиарейсы. Известно, что из любого города в любой другой можно долететь, совершив не более 100 перелетов. Кроме того, из любого города в любой другой можно долететь, совершив четное число перелетов. При каком наименьшем натуральном d из любого города можно гарантированно долететь в любой другой, совершив четное число перелетов, не превосходящее d ?
6. Двое игроков по очереди расставляют в каждой из 24 клеток поверхности куба $2 \times 2 \times 2$ числа $1, 2, 3, \dots, 24$ (каждое число можно ставить один раз). Второй игрок хочет, чтобы суммы чисел в клетках каждого кольца из 8 клеток, опоясывающего куб, были одинаковыми. Сможет ли первый игрок ему помешать?
7. Петя и Вася по очереди ставят точки на окружности: Петя начинает первым, и ставит синие точки, а Вася — красные. У каждого из них есть n ходов (число n заранее известно). В конце получается окружность с расставленными на ней n красными и n синими точками. Назовём дугу окружности синей(красной), если обе её граничные точки синие(красные), и любых других точек на ней нет (если таких дуг вообще не нашлось, то считается, что их длина равна нулю). Если самая длинная синяя дуга оказалась больше самой длинной красной, то побеждает Петя, если наоборот — Вася. В случае равенства объявляется ничья. Кто может гарантировать себе победу при правильной игре?