

Геометрический разнобой

1. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). На меньшей дуге AB описанной около него окружности взята точка D . На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что A и E лежат в одной полуплоскости относительно BC . Описанная окружность треугольника BDE пересекает сторону AB в точке F . Докажите, что $EF \parallel BC$.
2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH . Точки M и N — середины отрезков AH и CH соответственно. В окружности Ω , описанной около треугольника BMN , проведен диаметр BB' . Докажите, что $AB' = CB'$.
3. В четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D прямые. Точки K и M — проекции вершин A и C соответственно на прямую BD . Через точку K проведена прямая, параллельная BC и пересекающая AC в точке P . Докажите, что угол KPM — прямой.
4. Пусть O — центр окружности Ω , описанной около остроугольного треугольника ABC . На дуге AC этой окружности, не содержащей точку B , взята точка P . На отрезке BC выбрана точка X так, что $PX \perp AC$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника VXP , лежит на окружности, описанной около треугольника ABO .
5. Внутри равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD расположена окружность ω с центром I , касающаяся отрезков AB , CD и DA . Окружность, описанная около треугольника BIC , вторично пересекает сторону AB в точке E . Докажите, что прямая CE касается окружности ω .
6. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P . Пусть K , L , M , N — середины соответственно сторон AB , BC , CD , AD . Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников PKL , PLM , PMN и PNK равны.
7. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены три общие касательные — две внешние, a и b , и одна внутренняя, c . Прямые a , b , c касаются окружности ω_1 в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно, а окружности ω_2 — в точках A_2 , B_2 , C_2 соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов ω_1 и ω_2 .
8. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90^\circ$) отмечена точка T так, что треугольник ATD — остроугольный. Пусть O_1 , O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT , DAT и CDT соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD .